

## *Ecuția generală de mișcare – nimic mai simplu!?*

## *The general equation of motion - nothing simpler!?*

Ion Preda - Departamentul de Autovehicule și Transporturi, Universitatea Transilvania din Brașov

**Cuvinte cheie:** ecuație generală de mișcare, masă aparentă, forță la roată, forță de aderență, alunecare

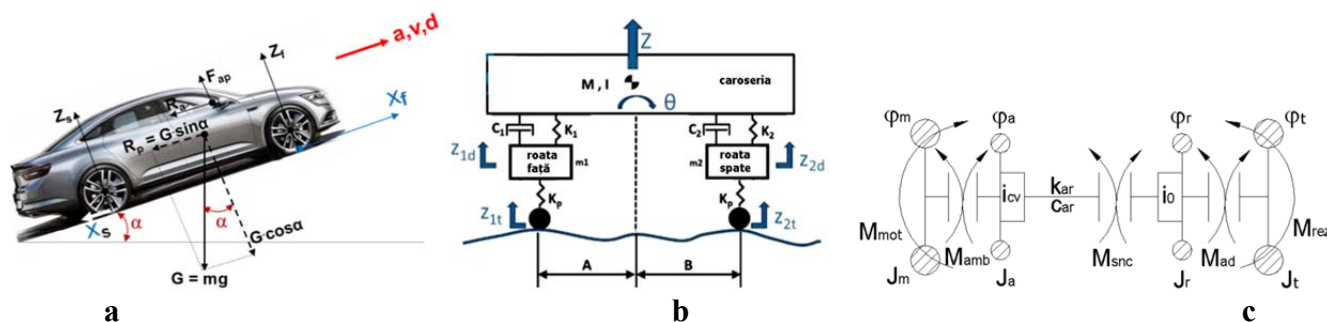
În articolul [12], publicat într-un număr anterior al revistei, s-a discutat despre demarajul autovehiculelor și s-a arătat că se obișnuiește a se aprecia aceste performanțe cu ajutorul unei singure ecuații diferențiale, numite *ecuație generală de mișcare*. Forma acesteia

$$a = \frac{F_R - \Sigma R}{m_{ap}} = \frac{F_R - (R_r + R_p + R_a)}{m_{ap}} \quad (1)$$

se regăsește în numeroase lucrări de specialitate (de ex. [13][3][8][2]). Ecuția (1) este folosită nu numai pentru calculul accelerațiilor pozitive sau negative (la demaraj sau la frânare), dar și, prin particularizare, la aflarea altor aspecte importante ale dinamicii autovehiculului: viteza maximă, rampa maximă, performanțele necesare ale motorului sau rapoartele de transmitere.

În ecuația (1), notațiile folosite au următoarele semnificații:  $a$  – accelerația instantanee a autovehiculului;  $F_R$  – forța la roată totală;  $R_r$  – rezistența la rulare a autovehiculului;  $R_p$  – rezistența pantei;  $R_a$  – rezistența aerodinamică;  $m_{ap}$  – masa aparentă a autovehiculului.

În timpul deplasării, autovehiculul interacționează cu mediul (gravitația, aerul și terenul). Prin interacțiunea autovehiculului cu mediul apar întotdeauna trei rezistențe (figura 1.a):  $R_p$  la interacțiunea sa cu gravitația;  $R_a$  la interacțiunea cu aerul atmosferic și  $R_r$  la interacțiunea tuturor roților cu solul. Termenul  $\Sigma R$  care apare în ecuația (1) reprezintă suma rezistențelor la înaintare:  $\Sigma R = R_r + R_p + R_a$ .



**Fig. 1.** Model dinamic combinat utilizabil pentru studiul regimurilor tranzitorii ale unui autovehicul:

**a)** model plan cu schema forțelor exterioare care acționează asupra autovehiculului la mersul în linie dreaptă; **b)** model plan pentru studiul oscilațiilor de translație verticale și a încărcării pneurilor și elementelor suspensiei; **c)** model cu volanți, arbori și elemente de cuplare idealizate pentru studiul aderenței, oscilațiilor de torsiune și al funcționării elementelor de cuplare din transmisie

Dar pentru a se putea deplasa, autovehiculul trebuie să genereze însă și forțe motoare (forțe active) care să poată învinge, sau măcar să echilibreze, forțele rezistente (forțele pasive) amintite anterior. Pentru aceasta, autovehiculul nu are la dispoziție decât tot interacțiunea cu mediul. Deși propulsarea cu ajutorul gravitației sau aerului este posibilă, în general aceasta se realizează prin interacțiunea roților cu solul, prin procesul fizic numit *aderență*.

Forța de aderență generată de o roată acționează în planul suprafeței de contact dintre roată și sol și poate avea orice orientare în acest plan. Pentru ca apariția ei să fie posibilă este nevoie de două elemente: contact între roată și sol (o forță de reacțiune a solului pe direcție perpendiculară pe suprafața de contact – precum  $Z_f$  și  $Z_s$  în figura 1.a) și o anumită alunecare (sau măcar o tendință de alunecare) între roată și sol.

Astfel, forța de aderență a unei roți poate fi calculată cu relația

$$F_{ad} = \mu \xi(\lambda) Z \quad (2)$$

în care  $\mu$  este coeficientul de aderență,  $Z$  – reacțiunea normală a solului,  $\lambda$  – coeficientul de alunecare totală (cu valori absolute cuprinse în intervalul 0...1), iar  $\xi$  – forța de aderență specifică, adică raportul

dintre forța de aderență curentă și forța de aderență maximă;  $\zeta$  este o funcție de  $\lambda$ , având o formă tipică precum cea din figura 2 și valori absolute cuprinse de asemenea în intervalul 0...1.

Componenta  $X_{tot}$  pe direcția de deplasare a forței de aderență însumate de la toate roțile va contribui, alături de rezistența pantei și de rezistența aerodinamică la accelerarea, decelerarea sau menținerea constantă a vitezei autovehiculului.

Pentru a afla accelerația autovehiculului, trebuie să aplicăm legea a doua a dinamicii (a lui Newton), care spune că pentru a afla accelerația unui corp pe o anumită direcție trebuie să împărțim componenta pe acea direcție a sumei forțelor exterioare la masa corpului. În conformitate cu figura 1.a, pentru direcția de mers înainte, direcția  $x$ , ecuația de mișcare devine:

$$a = \frac{\Sigma F_{extx}}{m} = \frac{X_{tot} - (R_p + R_a)}{m} \quad (3)$$

unde  $\Sigma F_{extx}$  reprezintă suma forțelor exterioare care acționează asupra autovehiculului pe direcția  $x$  (numită și rezultanta forțelor exterioare sau forța netă pe acea direcție).

Se constată că între ecuațiile (1) și (3) există diferențe. Să precizăm mai întâi în ce constau acestea. În ecuația (3) apare componenta forței de aderență totale pe direcția de deplasare  $X_{tot}$ , pe când în ecuația (1) găsim forța la roată totală  $F_R$ . O altă diferență între ecuațiile (1) și (3) constă în apariția masei aparente  $m_{ap}$  în prima, respectiv a masei reale  $m$  în cea de a doua. În fine, cea de a treia diferență este reprezentată de lipsa explicită a rezistenței la rulare  $R_r$  în ecuația (3). Pentru această ultimă constatare, explicația este însă simplă: componenta pe direcția de mers a forței de aderență a unei roți nemotoare (cu valoare negativă) este chiar rezistența la rulare a acelei roți (în figura 1.a, unde s-a considerat un autoturism cu tracțiune față,  $X_s = R_{rs}$ ), iar o componentă pozitivă pe direcția de mers a forței de aderență a unei roți motoare poate să apară doar dacă a fost învinsă rezistența la rulare a acesteia.

Despre ecuația (3) se poate afirma cu certitudine că e corectă, pentru că este o particularizare a unei legi cu acceptare generală. Și atunci de ce se utilizează cu precădere ecuația (1) și nu cea care știm sigur că e corectă? Probabil că explicația utilizării atât de frecvente a ecuației (1) se datorează în cea mai mare măsură faptului că, prin forța la roată totală  $F_R$ , performanțele de demarare ale autovehiculului se raportează în mod direct la performanțele motorului și transmisiei, respectiv la cele ale sistemului de frânare și, prin aceasta la acțiunile imediate ale conducătorului.

În continuare, să vedem dacă ecuația generală de mișcare (1) înlocuiește corect ecuația (3).

Începând cu forța la roată, trebuie spus că aceasta **nu este o forță exterioară** ce acționează asupra autovehiculului, ci este o mărime convențională, care nu poate fi măsurată direct. Ea depinde de momentul motorului, de caracteristicile transmisiei și de razele dinamice  $r_d$  ale tuturor roților motoare ale autovehiculului prin următoarea ecuație de definiție:

$$F_R = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{M_{Rj}}{r_{dj}} \quad (4)$$

în care  $M_R$  este momentul la roată,  $j$  indică o roată motoare oarecare, iar  $N_m$  reprezintă numărul total al roților motoare.

Este necesar să se arate că adesea forța la roată se confundă cu forța de tracțiune, deși acestea înseamnă lucruri diferite. Dacă pentru o roată forța la roată este raportul dintre momentul la roată și raza sa dinamică, forța de tracțiune este componenta forței de aderență pe direcția longitudinală a roții.

În schimb, forța de aderență totală și componenta sa pe direcția de mers  $X_{tot}$  nu depind explicit de motor, transmisie și frâne (ecuația 2), ci doar de „istoria” deplasării vehiculului (de poziția instantanee în spațiu

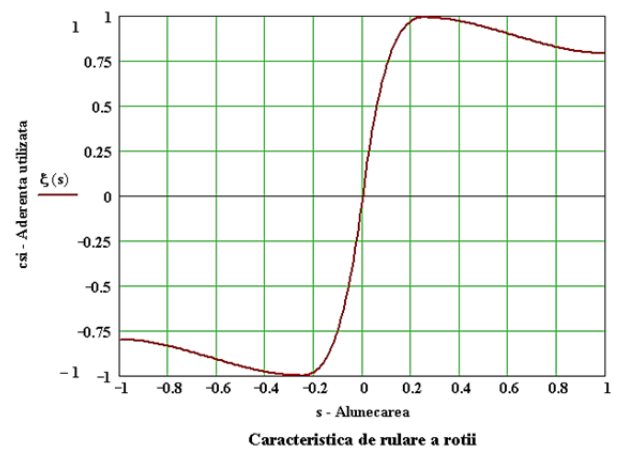


Fig. 2. Caracteristică tipică de rulare a pneului: reprezentarea forței de aderență specifice  $\zeta$  în funcție de coeficientul de alunecare  $\lambda$ .

a autovehiculului, prin  $Z$ ,  $\mu$  și forma funcției  $\zeta$ , respectiv de valorile instantanee ale vitezei de translație a autovehiculului și vitezelor unghiulare ale roților, prin  $\lambda$  – ecuația 12).

Într-adevăr, nu există o legătură directă, între forța la roată și forța de aderență, precum nu există o astfel de legătură între comenzile conducătorului auto și răspunsul autovehiculului! Aceasta înseamnă că autovehiculul nu poate fi condus? Ba da, dar numai într-un final și ca urmare a unui proces complex și afectat de întârzieri, care leagă acțiunea conducătorului auto de schimbarea vitezei autovehiculului. Astfel, acționând pedalele de accelerație, de ambreiaj și de frână sau levierul cutiei de viteze, conducătorul determină modificarea momentului la roată (de antrenare sau de frânare), ceea ce înseamnă că modifică forța la roată. Ca urmare se modifică accelerațiile unghiulare ale roților motoare care determină în timp schimbarea vitezelor lor de rotație. Rezultatul este schimbarea mărimii alunecării, care determină modificarea forțelor de aderență. Forțele de aderență însumate de la toate roțile modifică accelerația autovehiculului și în final se produce schimbarea vitezei de deplasare dorite de conducător, dar probabil nu la nivelul dorit de acesta. Ca urmare, conducătorul va face corecții ale comenzilor sale pentru a apropia răspunsul autovehiculului de cel pe care îl dorea. Așadar controlul dinamicii unui autovehicul nu este un proces instantaneu și proporțional cu comenzile date, ceea ce, printre altele, face necesară școala de conducere și căpătarea de experiență.

Dacă se depășește o anumită valoare a forței la roată comandate de șofer, procesul de generare a aderenței devine unul extrem de instabil, deoarece, la creșterea nivelului comenzii, forța de aderență va scădea (invers decât așteptarea conducătorului). Pentru redobândirea unei legături progresive și stabile între comenzi și forța de aderență, forța la roată trebuie redusă destul de mult și cât mai rapid, lucru pe care îl pot face doar conducătorii experimentați și nici ei chiar întotdeauna.

Prin aceasta se poate constata că modificarea forței la roată nu va conduce întotdeauna la modificarea performanțelor dinamice ale autovehiculului în sensul dorit.

Pentru că suntem răi și avem ceva cu ecuația generală de mișcare (1), să încercăm să-i mai găsim și alte probleme!

Un prim exemplu: dorim să utilizăm relația pentru pornirea de pe loc (demarare de la viteză zero). În această situație motorul funcționează (are o anumită viteză unghiulară), dar roțile nu se rotesc, deoarece autovehiculul este imobil. În acest caz rezultă că raportul de transmitere este infinit și atunci și masa aparentă este infinită (așa cum indică ecuația 21, găsită în cvasi-totalitatea cărților de dinamica autovehiculelor). Cum numărătorul fracției (suma forțelor care acționează asupra autovehiculului) are o valoare finită (cuplul maxim transmis de un ambreiaj sau un convertizor hidrodinamic de cuplu nu pot depăși anumite valori maxime), rezultă că autovehiculul nu poate porni din loc, deoarece accelerația sa este zero. Evident, acest rezultat este incorect: în realitate, autovehiculul pornește.

Un al doilea exemplu: deși toate mărimile care intervin în ecuația (1) rămân practic la fel, știm cu toții că un autovehicul va demara mult mai lent pe gheață decât pe asfalt uscat.

Și atunci, unde este problema?

Cauza rezultatului incorect constă în aceea că ecuația a fost determinată pentru anumite condiții și este aplicată (ca în cele două exemple) pentru altele, diferite de cele presupuse. Din păcate, în majoritatea lucrărilor care prezintă ecuația generală de mișcare, aceste condiții și ipoteze sunt insuficient sau chiar prea puțin precizate, ceea ce face ca ecuația să fie utilizată adesea pentru situații neconforme, conducând astfel la rezultate incorecte sau chiar paradoxale.

Dar să încercăm să găsim unde e greșeala. Pentru aceasta ar trebui să folosim o *abordare sistematică*. Și, evident, să construim un model.

Să considerăm un autovehicul cu două punți (de ex. cu tracțiune pe roțile din față, ca în figura 1) și să vedem mai întâi care sunt componentele mecanice implicate în realizarea demarajului.

Vom începe cu corpul autovehiculului (caroseria), roțile motoare și roțile nemotoare (5 corpuri). Dar roțile motoare trebuie să fie antrenate (puse în mișcare). Pentru aceasta este nevoie de (cel puțin) un motor. Dacă acesta este unul termic (așa cum este situația, încă, la marea majoritate a autovehiculelor actuale), atunci acesta trebuie să fie combinat cu o transmisie, care să permită transmiterea puterii la distanță, împărțirea puterii la roțile motoare și compensarea unor dezavantaje ale motorului termic

(precum imposibilitatea de a porni sub sarcină, de a funcționa la turații reduse, de a își schimba sensul de rotație și de a se putea adapta la totalitatea condițiilor de deplasare ale autovehiculului). Rezultă că transmisia va trebui să conțină arbori, un diferențial, un reductor (pentru micșorarea turației), o cutie de viteze (pentru schimbarea rapoartelor de transmitere) și un ambreiaj sau un convertizor hidrodinamic de cuplu (pentru pornirea din loc).

Deoarece în timpul demarajului trebuie cuplate și decuplate atât un ambreiaj, cât și un dispozitiv de schimbare a treptelor de viteze (de obicei, un sincronizator), înseamnă că pentru antrenarea roților motoare mai trebuie considerate încă cel puțin 2 corpuri echivalente figura 1.c: volantul (cu arborele cotit) al motorului și arborele de intrare al cutiei de viteze (evident, considerându-se inerția tuturor pieselor solidare la mișcare cu acestea).

Aceasta înseamnă că cel mai simplu model care ar putea fi folosit pentru studiul demarajului unui autovehicul trebuie să includă minim 7 corpuri<sup>1</sup>. Deoarece fiecare corp poate avea 6 grade de libertate (trei translații și trei rotații), rezultă  $6 \times 7 = 42$  grade de libertate (GdL), adică ar trebui 42 de ecuații diferențiale de mișcare!!!

Dar să ne reamintim că Albert Einstein a spus (se pare, însă, într-un alt context): „Everything should be made as simple as possible, but not simpler”, adică „Totul ar trebui să fie (făcut) cât se poate de simplu, dar nu mai simplu”. Să ne ocupăm de prima parte a acestei maxime și să încercăm să simplificăm modelul autovehiculului.

**S1.** Atât pentru arborele cotit al motorului cât și pentru arborele primar al cutiei de viteze se poate folosi doar un singur grad de libertate: rotația în jurul axei de simetrie (figura 1.c); prin aceasta sunt anulate cinci grade de libertate pentru fiecare dintre cele două corpuri echivalente; numărul gradelor de libertate ale modelului se va reduce cu  $5 \times 2 = 10$ . Modelul rămâne cu  $42 - 10 = 32$  GdL.

Dacă această reducere a complexității modelului (pare că) este justificabilă, pentru a mai face și altele trebuie să se recurgă la noi ipoteze simplificatoare, ceva mai greu de acceptat.

**S2.** O astfel de ipoteză care se face aproape întotdeauna la studierea procesului de demarare este aceea că autovehiculul se deplasează în linie dreaptă. Aceasta ipoteză va avea mai multe implicații:

- Corpul autovehiculului nu se va deplasa lateral (nu se va clătina) și nu va avea mișcare de girație; astfel, se elimină 2 grade de libertate, iar modelul rămâne cu  $32 - 2 = 30$  GdL.
- Fiecare roată nu poate avea decât o mișcare plană, adică va avea doar trei grade de libertate: rotația în jurul axei și două translații: de săltare (ridicare-coborâre) și de zvâcnire (înainte-înapoi); se elimină astfel  $3 \times 4 = 12$  GdL, iar modelul va avea  $30 - 12 = 18$  GdL.
- Drumul nu este înclinat lateral.
- Nu există componente laterale ale forțelor și momentelor aerodinamice.
- Forțele de aderență de la roți au doar o componentă longitudinală, care se suprapune cu direcția de mișcare a autovehiculului (toată forța de aderență este folosită doar pentru demarare sau frânare, nu și pentru virare sau pentru împiedicarea alunecării laterale).

**S3.** Următoarea ipoteză care se face este cea a simetriei comportamentului roților din stânga și din dreapta. Prin aceasta autovehiculul cu patru roți devine un vehicul cu două roți echivalente, adică un fel de motocicletă care merge doar în linie dreaptă, figura 1.a și b.

- Prin aceasta se elimină gradele de libertate considerate anterior pentru două roți ( $3 \times 2 = 6$  GdL). Modelul va avea acum  $18 - 6 = 12$  GdL.
- Corpul autovehiculului nu va mai putea avea mișcare de rulu; astfel se mai elimină un grad de libertate și modelul va avea  $12 - 1 = 11$  GdL.

Ipoteza simetriei comportamentului roților din stânga și din dreapta presupune și îndeplinirea condițiilor de mai jos, care însă sunt greu de presupus că se întâmplă în realitate:

---

<sup>1</sup> Adesea, mai corect ar fi să se considere încă un corp în plus, adică 8 corpuri. Pentru reducerea vibrațiilor torsionale, la autoturismele moderne se folosește un sistem de amortizare cu volant dublu (între cei doi volanți pot apărea rotații relative de  $\pm 60^\circ$ ), iar la autovehiculele care nu au un astfel de sistem, dar au ambreiaj cu amortizor de vibrații torsionale, între discul de fricțiune și arborele primar al cutiei de viteze pot apărea de asemenea mișcări relative mari, de  $\pm 7^\circ$ .

- Profilul vertical al drumului și coeficienții de aderență și de rezistență la rulare sunt identici la roțile din stânga și din dreapta.
- Încărcarea autovehiculului este simetrică stânga-dreapta.
- Roțile aceleiași punți (din stânga și din dreapta) sunt identice și au un comportament identic.
- Diferențialul distribuie momentul în părți egale la cele două roți.
- Apăsarea normală pe drum exercitată de cele două roți ale unei punți este identică. Dar, la autovehiculele cu motor dispus longitudinal, această ipoteză nu poate fi îndeplinită dacă motorul generează moment (din cauza momentului reactiv aplicat punții motoare)!

**S4.** Încheiem pentru moment cu următoarea ipoteză: cele două roți echivalente, din față și din spate, ale modelului nu au joc longitudinal față de corpul autovehiculului, ceea ce înseamnă că accelerațiile lor de translație vor fi identice cu accelerația corpului autovehiculului. Prin aceasta se mai elimină 2 GdL și modelul rămâne cu  $11-2=9$  GdL.

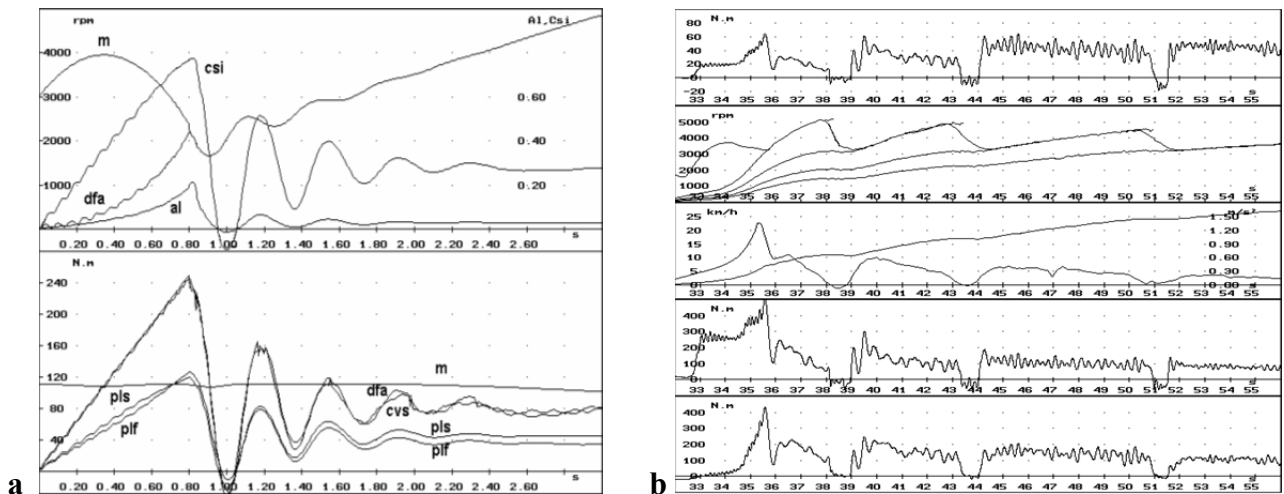
Din păcate, în cărțile în care se tratează dinamica autovehiculelor sunt foarte rar prezentate toate aceste ipoteze, care ar permite să se înțeleagă mai bine limitările pe care le au modelele folosite pentru demonstrații.

În acest moment al prezentării, să facem o scurtă recapitulare a corpurilor și gradelor lor de libertate considerate până acum și care au condus la modelul din figura 1:

- corpul autovehiculului are 3 GdL: zvâcnire (tr. pe X), săltare (tr. pe Z) și tangaj (rot. pe Y);
- roata echivalentă nemotoare are 2 GdL: săltare și rotație pe Y;
- roata echivalentă motoare are 2 GdL: săltare și rotație pe Y;
- arborele primar echivalent al cutiei de viteze are 1 GdL: rotație;
- arborele cotit echivalent al motorului are 1 GdL: rotație.

Așadar sunt 9 GdL în total, așa cum s-a calculat anterior.

Fără să permită studiul a numeroase aspecte, un astfel de model permite surprinderea unui număr destul de mare de fenomene care apar pe parcursul demarajului sau frânării unui autovehicul (precum cuplarea ambreiajului, schimbarea treptelor de viteză, apariția vibrațiilor torsionale din sistemul de propulsie sau a smuciturilor pe direcția de înaintare, relaxarea transmisiei după cuplarea ambreiajului) și poate da rezultate foarte apropiate de cele obținute experimental, ca cele prezentate în figura 3 [10].



**Fig. 3.** Rezultate obținute prin simulare (a) și experiment (b) privind demararea unui autoturism 4x4 experimental [10];  
**a – sus:** m și dfa – turația motorului și a discului de fricțiune al ambreiajului, al – alunecarea roților motoare din spate, csi – forța tangențială specifică a roților motoare din spate; **a – jos:** m, dfa, cvs, plf și pls – momentele de torsiune (reduse la volant) ale motorului, discului de fricțiune al ambreiajului, arborelui secundar al cutiei de viteze, al roților motoare din față și din spate; **b (de sus în jos)** – momentul transmis de ambreiaj, turațiile motorului și discului de fricțiune al ambreiajului, accelerația și viteza autovehiculului, momentul la roțile din spate, momentul la roțile din față

Un astfel de model cu 9 GdL permite și calculul principalelor momente de torsiune și forțe care apar la demaraj sau frânare și care solicită componentele autovehiculului, dar și estimarea puterilor și energiilor care se pierd prin patinarea convertizorului hidrodinamic [1] sau a ambreiajului, sincronizatorului sau roților [10].

În prezent, inginerii proiectanți, parcă parafrazându-l pe Albert Einstein, încercând să facă arborii cât mai ușori, îi fac și mai puțin rezistenți (dar nu chiar într-atât încât să nu mai funcționeze corect sau să se rupă). Aceasta înseamnă că vibrațiile torsionale pot să aibă amplitudini destul de mari (figura 3) și să conducă la apariția unor solicitări mecanice mult mai mari decât cele statice.

În intenția noastră de a ne apropia de o singură ecuație diferențială de mișcare trebuie să recurgem în continuare la adoptarea unor noi ipoteze.

**S5.** De obicei, la simplificarea în continuare a modelului se începe cu considerarea unei rigidități foarte mari a arborilor (ceea ce tocmai am arătat că nu este adevărat). Considerând că mufa sincronizatorului este cuplată și că arborii sunt absolut rigizi la torsiune, corpurile arbore primar al cutiei de viteze și roată motoare ( $J_a$  și  $J_m$  în figura 1.c) s-ar comporta cu un singur volant, care se rotește în jurul axei roții motoare. Numărul gradelor de libertate (și al ecuațiilor de mișcare) s-ar reduce la  $9-1=8$  GdL. Aceasta va presupune însă că studiul demarajului se poate face doar considerând că o treaptă de viteză este deja cuplată și este păstrată neschimbată pe toată durata simulării.

**S6.** Următoarea ipoteză simplificatoare ar fi că razele dinamice ale roților nu se modifică în timpul demarajului. Prin aceasta modelul se simplifică la  $8-2=6$  GdL, pentru că roțile nu mai pot avea mișcare de săltare. Această ipoteză este departe de a fi corectă: denivelările terenului, schimbarea încărcării dinamice pe roată, aplicarea unui moment variabil de antrenare (Figura 4) sau de frânare sau modificarea turațiilor roților conduc toate la modificări importante ale valorii razei dinamice față de cea statică. În plus, recurgerea la această ipoteză va conduce la pierderea unor fenomene foarte interesante, care apar, de exemplu la pornirea din loc a autovehiculelor cu cutie de distribuție fără diferențial interaxial [10], la care, în regim 4x4, se solidarizează la rotație roțile din față cu cele din spate<sup>2</sup>.



*Fig. 4. Modificarea razei dinamice a roții unui dragster în timpul unui demaraj, cauzată în special de momentul motor aplicat*

**S7.** O altă ipoteză care poate permite reducerea numărului de grade de libertate este să se considere că mișcările de tangaj și de săltare ale caroseriei nu se pot produce. Ar rămâne astfel  $6-2=4$  GdL: rotația arborelui cotit al motorului, rotația roții motoare, rotația roții nemotoare și translația caroseriei. Și aceste ipoteze sunt greu de acceptat (chiar dacă s-ar considera un drum neted și fără variații bruște ale înclinării longitudinale).

Pe de o parte, la viteze mari, componenta normală pe cale a forței aerodinamice poate deveni importantă, producând portanță la autovehiculele obișnuite (forța  $F_{ap}$  în figura 1.a), respectiv deportanță (portanță negativă sau apăsare) la automobilele sport sau de curse. Aceste influențe ar modifica razele dinamice ale roților și deformațiile arcurilor suspensiei (dacă aceasta există), generând săltarea și tangajul caroseriei.

Pe de altă parte, ipoteza lipsei tangajului și săltării caroseriei pot fi admise cu greu, deoarece regimul accelerat al unui autovehicul (fie el și fără suspensie, precum un tractor obișnuit) este însoțit în mod continuu de un transfer de încărcare de la roțile unei punți la cele ale celeilalte punți (la demarare se descarcă roțile din față și se încarcă cele din spate). În unele lucrări [6], transferul de încărcare normală a roților este luat în considerare, dar presupunându-se că apare instantaneu, fără mișcări ale caroseriei. Deși mai aproape de realitate, nici această ipoteză nu se susține, deoarece ar presupune ca toate forțele exterioare (deci și accelerația) vehiculului să rămână constante, deși viteza e variabilă.

**S8.** Încă o ipoteză care se poate face constă în a considera că ambreiajul este complet cuplat sau convertizorul hidrodinamic de cuplu este blocat. Astfel, în modelul simplificat, inerția de rotație a pieselor motorului se va adăuga la cea a roții motoare, ca și când acestea ar forma un singur corp echivalent [13][3][8]. Ar rămâne astfel  $4-1=3$  GdL: rotațiile roților nemotoare și motoare și translația

<sup>2</sup> Din cauza creșterii razei dinamice a roților din față și a micșorării celei a roților din spate, roțile din față alunecă mult mai mult decât celelalte, motiv pentru care contribuie într-o proporție mai mare decât ne-am aștepta la accelerarea autovehiculului.

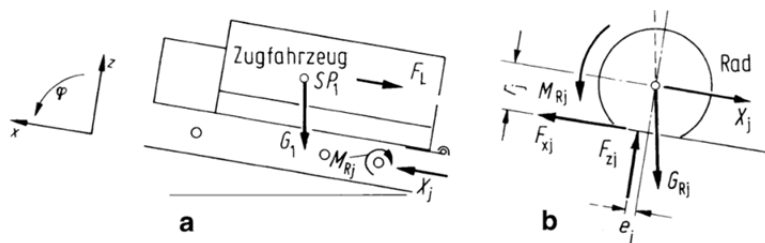
caroseriei pe direcția de mers. Deci, cu acest model cu doar 3 grade de libertate, studiul demarării de pe loc (de la viteză zero) nu se mai poate face!

**S9.** Altă ipoteză care se face adesea este includerea inerției la rotație a roții nemotoare echivalente ca o componentă a inerției de translație a corpului autovehiculului. Numărul gradelor de libertate va scădea astfel la  $3-1=2$ . Această ipoteză va putea fi considerată numai dacă se poate neglija alunecarea roții nemotoare (din model) față de sol. Evident, ipoteza nu poate fi acceptată dacă la roata nemotoare se aplică un moment de frânare (de exemplu, la pornirea de pe loc cu frâna de mână trasă, la autoturismele cu tracțiune pe față).

S10. În fine, trecerea de la două ecuații diferențiale la doar una singură (ecuația 1) nu se poate face decât dacă se consideră cunoscută mărimea alunecării (patinării) roților motoare sau se fac alte ipoteze simplificatoare în legătură cu aceasta.

Evident, simplificările prezentate pot fi efectuate și în altă ordine, iar modelele pot avea complexități diferite, în funcție de scopul urmărit. De exemplu, în lucrarea [13] sunt prezentate modele asemănătoare dar și mai complexe decât cele din figura 2, folosite pentru studiul vibrațiilor cuplate care apar în transmisia și suspensia autocamioanelor și tractoarelor, iar în [1], cu un model cu 3 grade de libertate, se studiază comportamentul unei autobasculante grele care dispune de un convertizor hidrodinamic de cuplu.

Pentru deducerea ecuației generale de mișcare, în lucrarea [8] se recurge la considerarea a trei corpuri echivalente: autovehiculul are doar o masă în translație (caroseria), o roată nemotoare și o roată motoare (figura 5), fiecare roată putând avea translație pe direcția de mers și rotație în jurul axei. Deși în această lucrare nu se menționează ipotezele simplificatoare utilizate, ea reprezintă una dintre cele mai elaborate (și corecte) modalități de demonstrare a ecuației generale de mișcare (1).



**Fig. 5.** Model dinamic cu 5 GdL (translația caroseriei și translația și rotația roților nemotoare și motoare) folosit pentru deducerea ecuației generale de mișcare (adaptare după [8])

Combinând masa caroseriei cu cele ale roților (în conformitate cu ipoteza – neprezentată însă în demonstrație – că nu există mișcare relativă pe direcția de mers între roți și caroserie) se ajunge la o singură masă în translație, masa totală a autovehiculului  $m$ . Rezultă astfel un model cu trei grade de libertate (așa cum s-a prezentat la simplificarea **S8**). Modelul matematic se obține prin scrierea sistemului de ecuații diferențiale pentru mișcarea de translație a autovehiculului, ecuația (5) și pentru rotația celor două roți (ale modelului), ecuațiile (6):

$$m a = \Sigma X_{Rj} - G \sin \alpha - R_a \quad (5)$$

$$J_{Rj} \varepsilon_{Rj} = M_{Rj} - X_{Rj} r_{dj} - Z_{Rj} e_j, \quad j=1,2 \quad (6)$$

Se poate observa că ecuația (5) obținută în acest mod este în fapt ecuația (3), întrucât  $R_p = G \sin \alpha$ .

Prin împărțirea ecuațiilor (6) la raza dinamică  $r_{dj}$ , acestea devin:

$$X_{Rj} = \frac{M_{Rj}}{r_{dj}} - Z_{Rj} \frac{e_j}{r_{dj}} - \frac{J_{Rj}}{r_{dj}} \varepsilon_{Rj} = F_{Rj} - Z_{Rj} f_j - \frac{J_{Rj}}{r_{dj}} \varepsilon_{Rj} \quad (7)$$

iar prin introducerea ecuațiilor (7) în ecuația (5) aceasta ia forma:

$$m a + \Sigma_{j=1}^2 \frac{J_{Rj}}{r_{dj}} \varepsilon_{Rj} = \left( m + \Sigma_{j=1}^2 \frac{J_{Rj} \varepsilon_{Rj}}{r_{dj} a} \right) a = m_{ap} a = \Sigma_{j=1}^2 F_{Rj} - \Sigma_{j=1}^2 R_{Rj} - R_p - R_a \quad (8)$$

Făcându-se identificarea termenilor:

$$m_{ap} = m + \Sigma_{j=1}^2 \frac{J_{Rj} \varepsilon_{Rj}}{r_{dj} a}, \quad F_R = \Sigma_{j=1}^2 F_{Rj} \quad \text{și} \quad R_r = \Sigma_{j=1}^2 R_{Rj} \quad (9)$$

se constată că ecuația (8) este chiar ecuația generală de mișcare (1).

Prin prima ecuație (9) se ajunge la noțiunea de *masă aparentă* (sau masă echivalentă sau masă efectivă), adică masa unui corp echivalent care, atunci când se deplasează linear cu aceeași viteză ca autovehiculul, are aceeași energie cinetică ca suma părților solidare la mișcare ale autovehiculului. Evident, masa aparentă a autovehiculului  $m_{ap}$  este mai mare decât masa reală a acestuia, deoarece acest termen înglobează și inerția pieselor din componența sistemului de propulsie și de rulare care se află în mișcare solidară cu roțile autovehiculului (masa în translație, roți, arbori, volant, biele, pistoane etc.). De aceea, în mișcare accelerată, autovehiculul se comportă ca și cum ar avea o masă mai mare decât cea reală.

În continuarea demonstrației din lucrarea [8] se consideră (din nou fără explicații) că

$$\frac{\varepsilon_{Rj}}{a} = \frac{\frac{d\omega_{Rj}}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{1}{\frac{dv}{d\omega_{Rj}}} = \frac{1}{r_{rj}} \quad (10)$$

Dar, prin definiție, raza de rulare a unei roți este  $r_r = \frac{v}{\omega_R}$  și atunci

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \frac{d\frac{v}{r_r}}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{v}{r_r^2} \frac{dr_r}{dt}, \quad (11)$$

ceea ce înseamnă că ecuația (10) poate fi adevărată doar dacă raza de rulare  $r_r$  este constantă. Însă, în timpul unui regim tranzitoriu de deplasare (demarare sau frânare), raza de rulare se modifică mult! De ce? Pentru că raza de rulare depinde de coeficientul de alunecare al roții, care poate lua valori foarte diferite la deplasarea cu viteză variabilă (a se vedea de exemplu curba *al* în figura 3.a-sus). Într-adevăr, dacă în continuare se consideră definiția ISO pentru coeficientul de alunecare [13][7],

$$\lambda = \frac{\omega_R r_d - v}{\max(\omega_R r_d, v)} \quad (-1 < \lambda < +1) \quad (12)$$

rezultă că în cazul tracțiunii (când  $\omega_R r_d > v$  și  $\lambda_t > 0$ ) raza de rulare este

$$r_r = r_d (1 - \lambda_t) \quad (13)$$

iar în cazul frânării (când  $\omega_R r_d < v$  și  $\lambda_f < 0$ ) raza de rulare este

$$r_r = \frac{r_d}{(1 + \lambda_f)} \quad (14)$$

Cu aceasta s-a demonstrat că ecuația generală de mișcare depinde de valoarea curentă a coeficientului de alunecare ( $\lambda_t$  la tracțiune și  $\lambda_f$  la frânare).

Deși s-a arătat că nu este așa, să presupunem în continuare (precum în lucrarea [8]) că, în regim de tracțiune, atât raza dinamică  $r_d$  cât și coeficientul de alunecare  $\lambda_t$  sunt constante. Atunci, din ecuația (13) rezultă că și raza de rulare  $r_r$  este constantă. Introducând ecuația (10), care acum poate fi acceptată, în ecuația (9), rezultă expresia masei aparente a autovehiculului pentru cazul în care raza dinamică și alunecarea pot fi considerate constante

$$m_{ap} = m + \sum_{j=1}^2 \frac{J_{Rj}}{r_{dj} r_{rj}} = m + \frac{J_{R1}}{r_{d1}^2 (1 - \lambda_{t1})} + \frac{J_{R2} (1 + \lambda_{f2})}{r_{d2}^2} \quad (15)$$

în care indicele 1 indică roțile motoare (din față în figura 1.a), iar indicele 2 roțile nemotoare (din spate).

Din această ecuație se poate observa că dacă patinarea roților motoare  $\lambda_{t1}$  este mare, masa aparentă crește foarte mult. La limită, în cazul patinării totale ( $\lambda_{t1}=1$ ), masa aparentă devine infinită, iar autovehiculul nu poate porni din loc. În schimb, la roata nemotoare apare o alunecare de frânare, cu valoare negativă, dar foarte apropiată de zero.

Însă, coeficientul de alunecare al roților motoare nu modifică doar masa aparentă, ci și forța la roată ca funcție de viteza autovehiculului. Pentru a demonstra acest fapt se pornește de la ecuația de definiție a forței la roată prin care această se raportează la momentul efectiv al motorului  $M_e$

$$F_{R1} = \frac{M_{R1}}{r_{d1}} = \frac{M_e i_{tr} \eta_{tr}}{r_{d1}} \quad (16)$$

și unde  $i_{tr}$  reprezintă raportul de transmitere total, iar  $\eta_{tr}$  randamentul transmisiei. Deoarece în cazul tracțiunii  $v = \omega_R r_r = \omega_R r_d (1 - \lambda_t)$ , înseamnă că atunci când apare o anumită patinare  $\lambda_t$  viteza



autovehiculului scade relativ cu turația motorului, făcând ca graficul forței la roată să se deplaseze spre viteze mai mici. Acest aspect este amintit extrem de rar în literatură [4][5].

O scurtă remarcă și față de randamentul transmisiei  $\eta_{tr}$ . Deși în general se adoptă valori constante pentru acesta, trebuie spus că valoarea sa poate scădea foarte mult dacă mărirea momentului efectiv al motorului  $M_e$  se reduce. Ba mai mult, uneori, când pedala de accelerație este puțin apăsată sau când autovehiculul rulează liber (cu motorul decuplat), nu se știe apriori dacă puterea circulă de la motor spre roți sau invers, făcând problematică chiar definirea randamentului [11]. Astfel, în aceste condiții este preferabil ca momentul la roată să nu mai fie calculat ca  $M_e i_{tr} \eta_{tr}$ , ci ca diferență dintre momentul motor amplificat cu raportul total de transmitere și un moment global  $M_{fr}$  al frecărilor care apar în transmisie

$$M_{R1} = M_e i_{tr} - M_{fr} \quad (17)$$

Prin aceasta momentul la roțile motoare  $M_{R1}$  și, în consecință, și forța la roată corespunzătoare  $F_{R1}$  vor putea trece ușor de la valori pozitive (de antrenare) la valori negative (de frânare).

Revenind la ecuația generală de mișcare în forma (8), este evident că aceasta poate fi folosită și pentru studiul frânării, cu condiția ca  $F_{Rj}$  să reprezinte de fapt momentul de frânare al roții  $j$  raportat la raza dinamică respectivă

$$F_{Rj} = \frac{M_{fj}}{r_{dj}} \quad (18)$$

În cazul frânării de serviciu apare o constrângere în plus, dată de modul în care sistemul de frânare distribuie momentele de frânare la cele două punți, adică  $M_{f2} = f_f(M_{f1})$ . Un lucru asemănător se întâmplă și în cazul autovehiculelor cu tracțiune integrală cu diferențial interaxial, deoarece diferențialul va determina o anumită proporție a momentelor la roată:  $M_{R1} = f_d(M_{R2})$ . Studiul devine și mai complicat în situația în care autovehiculul frânează de serviciu, dar realizează simultan și frânarea cu motorul, deoarece cele două funcții  $f_f$  și  $f_d$  se combină.

Tot dificil de studiat este și procesul demarajului unui autoturism de teren fără diferențial interaxial, deoarece roțile din față sunt solidar legate de cele din spate. În acest caz, considerarea unor arbori nedeformabili care conectează roțile din față de cele din spate ar fi extrem de departe de adevăr [10] (fig. 3). Și lucrurile s-ar complica și mai mult pentru autovehicule cu mai mult de două punți motoare.

Cu toate acestea, în marea majoritate a lucrărilor de specialitate se consideră (deși în general nu se enunță acest lucru) că roțile motoare au o alunecare neglijabilă [13][3][8][2][6], deci practic nu patinează. Însă această ipoteză este falsă, așa cum s-a arătat, și intră în conflict cu un alt aforism din limba engleză, bine cunoscut în lumea automobiliștilor: „*No slip, no grip*”, adică „*Fără alunecare nu există aderență*”! De aceea este foarte ciudat și greu de înțeles cum de se consideră în general că pierderea de putere prin patinare poate fi neglijată, știut fiind că, pe un drum de calitate bună (unde se înregistrează cele mai mici alunecări) și fără a se atinge valoarea maximă a forței de aderență, aceasta poate depăși ușor, de până la 10 ori, pierderea de putere cauzată de rezistența la rulare! Ca să nu mai spunem că aproape toate autoturismele normale reușesc în prezent „să rupă aderența” (adică să depășească alunecări de 10...20%) în prima treaptă de viteze, chiar și pe drumurile de cea mai bună calitate!

Lucrurile par și mai ciudate știut fiind că patinarea este considerată întotdeauna la calculul performanțelor de tracțiune ale tractoarelor [9].

Există foarte puține lucrări în care pierderea de putere prin patinarea roților este amintită [5] și, eventual, luată în considerație la studiul performanțelor dinamice [4].

Considerând că la deplasarea autovehiculului nu există alunecare, raza de rulare devine egală cu raza dinamică și atunci masa aparentă este calculată în final (inclusiv în lucrarea [8]) cu relația

$$m_{ap} = m + \frac{J_{R1}}{r_{d1}^2} + \frac{J_{R2}}{r_{d2}^2} \quad (19)$$

În acest caz, în concordanță cu simplificările S5 și S8, momentul de inerție asociat roților motoare devine

$$J_{R1} = J_{Rm} + J_e i_{tr}^2 \quad (20)$$

unde  $J_{rm}$  este momentul de inerție real al roților motoare și diferențialului, iar  $J_e$  este momentul de inerție redus la volant al pieselor în mișcare ale motorului, ambreiajului și cutiei de viteze.

Cu aceasta, masa aparentă a autovehiculului se poate calcula aproximativ cu relația

$$m_{ap} = m + \frac{J_{R2}}{r_{d2}^2} + \frac{J_{Rm} + J_e i_{tr}^2}{r_{d1}^2} \quad (21)$$

care se găsește în majoritatea cărților de dinamica autovehiculelor studiate ([13][3][8][2][6]) și unde se consideră și că razele dinamice rămân constante în regimuri tranzitorii (ceea ce nu este adevărat).

Mai trebuie amintit și că ecuația generală de mișcare (1) este utilizată adesea și pentru deplasarea în viraj, situație în care îndepărtarea de ipotezele enunțate este și mai mare.

Revenind la cea de a doua parte a maximei lui Einstein, “*but not simpler*”, aici s-a arătat că pentru a putea înțelege și evalua cât de cât corect un proces de deplasare accelerată a unui autovehicul (cu patru roți) ar trebui să folosim un model care să conțină minim 9 ecuații diferențiale de mișcare. Un comportament dinamic surprins cu o singură ecuație de mișcare, fie ea și “generală”, adică ecuația (1), va realiza o aproximare grosieră a demarajului sau frânării. Cu atât mai mult dacă ecuația se va utiliza pentru condiții de deplasare mult diferite de ipotezele simplificatoare enunțate anterior.

Așadar, foarte utilizată, deoarece este simplă ca formă și pare că leagă comenzile conducătorului și caracteristicile motorului și transmisiei de performanțele dinamice ale autovehiculului, ecuația generală de mișcare este doar aparent logică și necesită însă numeroase discuții și clarificări, atât pentru modul de deducere, pentru semnificația reală a mărimilor care intervin, dar și atenție la condițiile în care poate fi utilizată.

P.S. Am lucrat (zeci de) ani de zile cu ecuația generală de mișcare, inițial fără să îmi pun prea multe probleme dacă pot să o folosesc sau nu. Treptat însă am început să observ că sunt situații în care lucrurile nu sunt în ordine. Parte din ele le-am împărtășit aici.

Acum, la finalul acestui articol, mă gândesc că poate titlul său ar fi trebuit schimbat: „Ecuația generală de mișcare? Nimic nu este simplu!”

## BIBLIOGRAFIE

- [1] Ciolan, G., Preda, I. and Pereș, G. *Cutii de viteze pentru automobile*. Ed. Didactică și Pedagogică. București, 1998.
- [2] Genta, G. and Morello, L., *The Automotive Chassis. Vol. 2 - System Design*. Springer, 2009.
- [3] Gillespie, T. D., *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. SAE, Inc. Warrendale, USA, 1992.
- [4] Hauser, J. and Saccon, A. *Motorcycle modeling for high-performance maneuvering. Maximum velocity profile estimation*. IEEE Control Systems Magazine, pp. 89-105, 2006.
- [5] Jacobson, B. *Vehicle Dynamics. Compendium for course MMF062*. Chalmers University of Technology, 2016.
- [6] Lugner, P. *Vehicle Dynamics of Modern Passenger Cars*. Springer, 2019.
- [7] Milliken, W. F. and Milliken, D. L. *Race car vehicle dynamics*. SAE, 1997.
- [8] Mitschke, M. and Wallentowitz, H., *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. 4. Auflage. Springer, Berlin, 2004.
- [9] Nițescu, G., Năstăsioiu, S. and Popescu, S. *Tractoare*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.
- [10] Preda, I., *Studiul solicitărilor din transmisia autoturismelor de teren, în vederea optimizării acesteia*. Teză de doctorat. Univ. din Brașov, 1994.
- [11] Preda, I., Covaciu, D. and Ciolan, G. *Coast Down Test—Theoretical And Experimental Approach*. In The XI-th International Congress on Automotive and Transport Engineering CONAT 2010, Brașov, pp. 155-162, 2010.
- [12] Preda, I., Clenci, A., Cițu, L., Matrozi, A. and Boncescu, S., *Explorări lingvistice în Ingineria Autovehiculelor (VI). A linguistic journey in the field of automotive engineering (VI)*. Ingineria Automobilului nr. 54, pp. 9-12, martie 2020.
- [13] Untaru, M., Poțincu, G., Stoicescu, A., Pereș, G. and Tabacu, I., *Dinamica autovehiculelor pe roți*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1981.