ADERENȚA PNEU-SOL: O ALTĂ PERSPECTIVĂ
TIRE-GROUND GRIP: ANOTHER PERSPECTIVE

REZUMAT: *Fenomenul de interacțiune dintre pneu și sol denumit aderență este principalul responsabil de generarea forțele care permit controlul deplasării vehiculelor terestre. Acesta se află în strânsă legătură cu rezistența la rulare și cu modul în care momentul aplicat roții se transformă în forță de propulsie sau de frânare. Dacă înțelegerea acestor concepte pare a nu ridica probleme în majoritatea condițiilor specifice deplasării pe drum, există totuși numeroase alte situații care pot duce la discuții și interpretări. În textul următor, aceste procese fundamentale pentru autopropulsare sunt prezentate într-o perspectivă mai ampla, care să conducă la o mai bună înțelegere a lor și, prin aceasta, la utilizarea mai sigură și mai eficientă a autovehiculelor.*

ABSTRACT: *The phenomenon of interaction between the tire and the ground called grip is the main responsible for the generation of forces that allow the movement control of the land vehicles. It is closely related to the rolling resistance and to the way of converting the moment applied to the wheel into propulsive or braking force. If the understanding of these concepts does not seem to raise problems in most conditions specific to traveling on the road, there are still many other situations that can lead to discussions and interpretations. In the following text, these fundamental processes for self-propulsion are presented in a broader perspective, leading to a better understanding of them and thereby to safer and more efficient use of automotive vehicles.*

Key-Words: *tire-ground contact, grip, rolling resistance, tire modeling, experimental research*

Prof. dr. ing.
Ion PREDA
pion@unitbv.ro

Universitatea Transilvania din Brașov,
Departamentul de Autovehicule și Transporturi,
B-dul Eroilor, Nr. 29, 500024 BRAȘOV, România

1. INTRODUCERE

Asociat cu autovehiculul sau roata, auzim adesea rostit cuvântul aderență: mi-am cumpărat anvelope cu aderență mărită; accidentul s-a produs din cauza lipsei de aderență; mașina mea de raliu rupe frecvent aderența. Dar ce este de fapt aderența pneurilor?

Căutând în dicționare, cărți și articole științifice sau pe diferite site-uri profesionale, se găsesc destul de rar definiții pentru aderență, cu particularizare la autovehicule; totuși, din cele găsite, se desprind câteva caracteristici ale acestui termen: fenomen fizic; reacțiune; frecare[1] între pneu și suprafața de rulare; legătură între drum și vehicul; abilitate a pneului[2] de a răspunde la cerințele impuse de conducător pentru obținerea tracțiunii, frânării sau virării; asigurarea unui control adecvat al autovehiculului, atât pe drum drept, cât și în viraje. Oricum, din enunțurile întâlnite se poate înțelege că aderența este un proces fizic esențial pentru dinamica vehiculelor terestre.

Dacă pentru interacțiunea roții cu un sol tare, neted și orizontal, câteva dintre definițiile întâlnite ar putea fi satisfăcătoare, în cazul general, al interacțiunii cu orice fel de sol, marea majoritate a definițiilor nu mai sunt acceptabile și, pe bună dreptate, pentru că lucrurile nu sunt prea simple.

Riscând ca aceasta să nu fie suficient de clară, se va enunța totuși o definiție cât se poate de scurtă: aderența este fenomenul fizic care se opune mișcării relative a roții față de sol. Însă, un cârcotaș (ca autorul, de ex.) s-ar putea întreba imediat: care este direcția mișcării? poate fi oricare? sau este una anume, ce trebuie cunoscută?

Lucrurile sunt și mai complicate pentru termenul „forță de aderență". Facem abstracție de faptul că în multe definiții se spune că „forța de aderență este forță de frecare", dar reținem că aceasta are legătură cu „două suprafețe care se află în contact". O altă definiție, mai bună, este: "Forța de aderență a pneului este o mărime fizică ce se referă la forța tangențială care se manifestă la suprafața de contact dintre un pneu și calea de rulare a vehiculului". Nu numai că întrebările enunțate mai sus, la definiția aderenței, rămân, dar pot să mai apară și altele: de exemplu, cât de mare este această forță sau unde se consideră punctul ei de aplicație? În legătură cu ultima întrebare, putem accepta enunțul anterior, că forța de aderență este o forță tangențială? Observăm iar că lucrurile nu sunt foarte clare.

Constatăm de asemenea că, în literatura de specialitate (autohtonă sau internațională) din domeniul interacțiunii roții cu solul nu există un consens în ce privește denumirile și definițiile pentru forțele și momentele implicate în apariția forței de aderență (ca, de altfel, și pentru razele de lucru ale roților).

Un aspect extrem de util în clarificarea multor noțiuni necesare în acest domeniu a constat în apariția a două foarte utile standarde, realizate de două societăți renumite: Society of Automotive Engineers (SAE) [1] și International Society for Terrain-Vehicle Systems (ISTVS) [2]. Însă chiar și între aceste standarde există unele neconcordanțe, iar anumite definiții nu corespund unor situații particulare. Și mai este un aspect: standardul SAE tratează (fără a fi specificat explicit) doar interacțiunea pneului cu un sol neted și nedeformabil (cu drumul), iar standardul ISTVS, cu orice tip de sol (tare sau moale), dar neted. Mai mult, nu sunt clarificate suficient implicațiile pe care le aduce o înclinare laterală (față de direcția de mers) a acestui sol neted.

În continuare, termenul sol va fi folosit pentru a indica baza de sprijin a pneului (teren neamenajat sau drum). Acesta a fost preferat atât pentru că este mai scurt decât „cale de rulare" sau „suprafață de rulare", dar și pentru că sugerează ceva spațial (tridimensional) și material. Prin sol neted se va înțelege că zona de sprijin este plană înainte de trecerea pneului. Această suprafață plană reprezintă planul solului.

În [3] s-a încercat clarificarea câtorva dintre definițiile aferente acestui domeniu, precum și găsirea echivalențelor dintre termenii din limba engleză și din limba română.

Acest articol a fost realizat cu dorința de a prezenta altfel modul de generare a aderenței și, pornind de la aceasta, de a încerca o definire mai clară pentru forța de aderență, razele roților, rezistența la rulare și forța la roată, inclusiv pentru cazuri descrise mai rar, precum încercarea autovehiculelor pe standuri cu role sau trecerea peste obstacole.

2. DEFINIȚII

Pentru buna înțelegere a unor aspecte din următoarea parte a prezentării, se vor da mai întâi câteva definiții. Axa roții este axa de rotație a acesteia. Planul (median al) roții este planul de simetrie perpendicular pe axa sa de rotație.

1. Dacă aderența ar însemna doar frecare, nu ar mai fi fost nevoie de acest cuvânt. În caz general, aderența include frecarea, dar poate reprezenta mai mult decât atât.
2. Aderența nu este doar o caracteristică a pneului, ci a perechii sol-pneu (ambele elemente trebuie să fie considerate împreună).

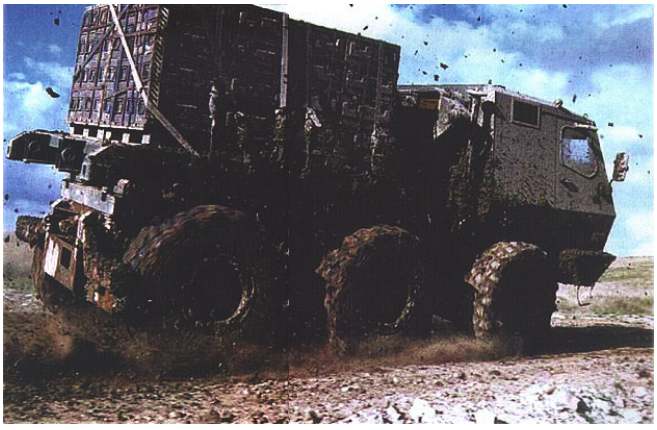

Fig. 1. Exemplu de interacțiune a roților cu solul: ca urmare a forțelor exercitate de roți, părți din sol (pământ sau nisip, în aceste imagini) sunt aruncate în direcția acțiunii forțelor

Centrul roții (punctul O din figura 10) este punctul de intersecție a axei roții cu planul roții. Centrul contactului pneului cu solul (punctul C din figura 10) este punctul de intersecție dintre planul roții și proiecția (perpendiculară[3] a) axei roții pe planul solului [1], [2]

Dacă primele trei definiții sunt foarte clare și unanim acceptate, la cea de a patra trebuie să se admită că este una convențională, deoarece acest punct (centrul contactului) nu numai că nu se află întotdeauna aproximativ în mijlocul zonei de contact, dar chiar poate să nu fie în această zonă (așa cum se poate vedea și în figura 13).

Pentru a se deplasa, vehiculele interacționează cu mediul ambiant: gravitația, aerul și solul. Fenomen de contact între două corpuri, interacțiunea roților cu solul (figura 1) îi permite vehiculului terestru să nu se scufunde și (opunându-se mișcării relative a roților față de sol) să genereze principalele forțe necesare conducerii, cu care șoferul să poată controla mișcarea vehiculului (adică propulsarea, frânarea și virarea sa). Tot aderența face ca roata condusă sau frânată parțial să nu alunece pe sol, ci să ruleze (să se rostogolească). Deoarece vehiculul trebuie să se deplaseze pe suprafața solului, pentru a fi utile mișcării, forțele de aderență generate de pneuri trebuie să aibă și ele o orientare pe cât posibil tangentă la această suprafață.

Fig. 2. Exemple de pneuri: netede (stânga), cu crampoane (mijloc) și cu pinteni (dreapta)

3. PATA DE CONTACT

Pneurile, cu excepția unora netede folosite în unele competiții auto, sunt prevăzute în marea lor majoritate cu crampoane sau pinteni (figura 2), care pot pătrunde într-un sol moale sau friabil, de ex. sol înierbat, pământ umed, zăpadă, nisip (figura 3). Având ca principal element constitutiv cauciucul (material elastoplastic), anvelopa[4], principalul component al pneului, se deformează sub influența forțelor și momentelor care acționează asupra sa, figura 4.

Partea suprafeței exterioare a pneului care intră în contact cu solul (și suferă deformații importante) se numește pată de contact a pneului (sau amprentă a pneului). Pata de contact poate fi plană pe soluri tari și netede (figura 5, dreapta), poate avea aproximativ forma unei cupe pe soluri moi (figura 5, stânga) sau poate avea alte forme pe alte tipuri de soluri.

Zona în care apare contactul pe soluri tari și netede, la exteriorul crampoanelor

Fig. 3. Deformarea solului moale la contactul cu pneul

sau pintenilor, se numește arie de contact [4] (suprafața neagră din figura 5, dreapta). Pe soluri moi, sub efectul unei apăsări crescânde, pneul va pătrunde tot mai adânc în sol, putând să-l atingă și să-l deformeze nu doar în zona crampoanelor, ci pe o porțiune mai mare, care, la o apăsare suficientă, va ajunge să fie delimitată de conturul întregii pete de contact (figura 3). Proiecția acestei zone extinse pe planul solului (suprafața neagră împreună cu cea albă din figura 5, dreapta) se numește arie de mobilitate [4].

Atunci când pneul rulează, forma și dimensiunile petei de contact se pot schimba de la un moment la altul. Forma petei de contact se modifică simultan cu deformarea generală a pneului, iar mărimea deformațiilor pneului și mărimea afundării în sol se modifică în funcție de caracteristicile solului, de

3. În multe definiții din cele două standarde, este folosit cuvântul „vertical” care, în limba engleză, are și sensul de „perpendicular”. Dacă în engleză acest lucru este firesc, în limba română trebuie folosit doar „perpendicular”, întrucât „vertical” indică direcția accelerației gravitaționale. În plus, în această definiție, este superfluu să se spună că proiecția unei drepte pe un plan este perpendiculară.

4. Deși sunt confundați adesea, termenii „pneu” și „anvelopă” au semnificații diferite: anvelopa, având ca material principal cauciucul, este învelișul exterior al roții și se fixează pe jantă, iar pneul este ansamblul format din anvelopă, aerul din interior și, eventual, camera de aer.

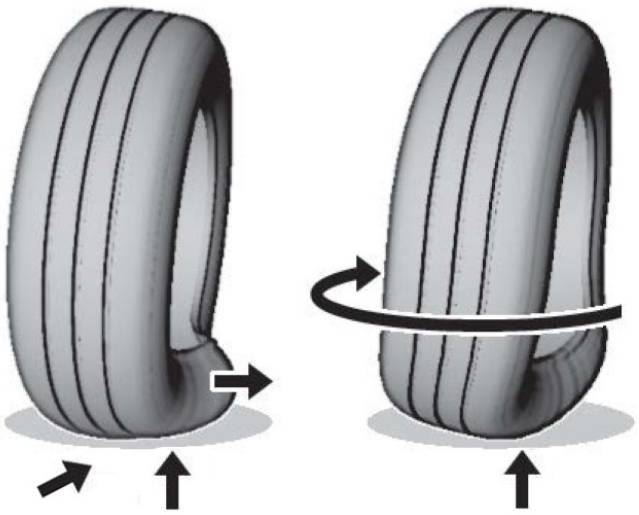

Fig 4. Deformația anvelopei sub efectul forțelor și al momentului de autoaliniere

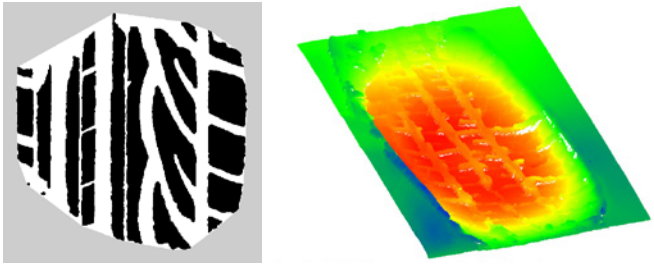

Fig. 5. Pata de contact pe un sol moale (stânga) [5], respectiv pe sol tare (dreapta), cu prezentarea ariei de contact (suprafața neagră) și a ariei de mobilitate (suprafața neagră împreună cu cea albă) [4]

caracteristicile constructive ale pneului, de încărcarea verticală, precum și de presiunea de lucru. Câteva valori tipice ale presiunii de umflare pentru pneuri: autocamioane și autobuze: 2…8,5 bar; autoturisme: 1,8…5,5 bar; autoturisme sport: 2…3,5 bar; F1: 1,5 bar; Formula student: 0,5…1,6 bar; bicicletă pentru drum: 4,1…8,3 bar; bicicletă pentru munte: 1…2,1 bar. La scăderea presiunii aerului din interior suprafața petei de contact crește (figura 3).

Din cauza forței necesare deformării anvelopei, presiunea medie în aria de mobilitate este ceva mai mare (cu circa 10…20%) față de presiunea la care sunt umflate pneurile. Pentru pneuri cu crampoane pe soluri tari și plane, aria de contact reprezintă circa 2/3 din aria de mobilitate. Ca un exemplu, un pneu de autoturism umflat la 2,2 bar produce o presiune medie de contact (forța de apăsare raportată la aria de contact) de aproape 3 bar, pe când unui pneu de autocamion umflat la 8 bar îi corespunde o valoare de 11 bar [6]. Însă presiunea locală (pe zone restrânse) poate fi mult mai mare decât cea medie (figura 6).

Pentru cele două tipuri de pneuri luate ca exemplu, vârfurile de presiune pot atinge 40 bar, respectiv 150 bar pe drumuri cu criblură nouă (foarte rugoase), însă se pot reduce de circa 8 ori pe drumuri uzate (mai netede). Informativ, aria de mobilitate a unui pneu de autoturism este de circa 150…200 cm2, iar cea a unuia de autocamion de circa 500…600 cm2.

Cu toate că majoritatea covârșitoare a pneurilor nu au o suprafață exterioară netedă (figura 2), înțelegerea modului de generare a forței de aderență este posibilă și printr-o modelare simplificată a contactului, de obicei considerând pneul ca un tor (sau chiar cilindru) neted (figurile 7, 8, 9).

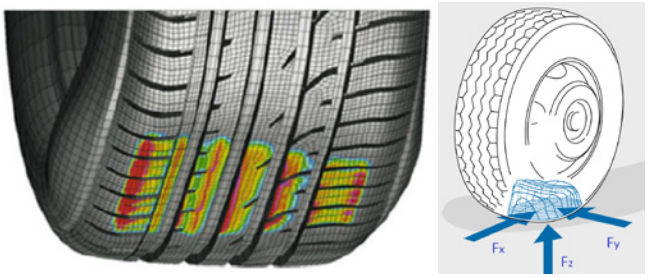

Fig. 6. Reprezentări posibile ale presiunii de contact

4. ADERENȚA CA PROCES DE CONTACT

4.1Forțe elementare pe suprafață

În timpul deplasării sau în staționare, roata acționează asupra solului. Ca urmare, solul reacționează asupra roții (figura 6). Din această cauză, în zona de contact apar eforturi normale elementare (vectori orientați perpendicular pe suprafața pneului) cu care solul acționează asupra pneului (figurile 7 și 8). În plus, în suprafețele elementare în care există alunecare locală (sau doar tendință de alunecare), vor apărea și eforturi de forfecare $\vec{\tau}$ (tangente la suprafață, care pot avea orice orientare în planul de tangență). Astfel de eforturi elementare (măsurate în N/m2) apar pe toată suprafața pe care pneul interacționează cu solul. O situație tipică pentru roată motoare se poate vedea în figura 8, unde eforturile de comprimare sunt reprezentate cu albastru deschis, iar cele tangențiale $\vec{\tau}$ cu roșu.

Având o anumită plasticitate, cauciucul consumă mai multă energie pe durata deformării inițiale decât se va recupera la anularea solicitării la care a fost supus (acest fenomen care duce la pierdere de energie se numește histerezis). Din această cauză, eforturile normale σ vor fi mai mari în partea din față a petei de contact (unde crește deformația) decât în cea din spate, unde se realizează destinderea (revenirea anvelopei la forma ei inițială se produce doar datorită presiunii aerului din interior). De aceea, din cauza histerezisului ce apare atunci când pneul rulează, epura (reprezentarea grafică a mărimii) acestor eforturi elementare este asimetrică pentru eforturile normale.

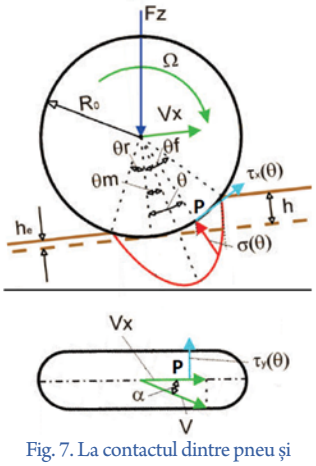

Fig. 7. La contactul dintre pneu și sol apar eforturi normale σ și tangențiale τ – schema corespunde interacțiunii cu un sol deformabil

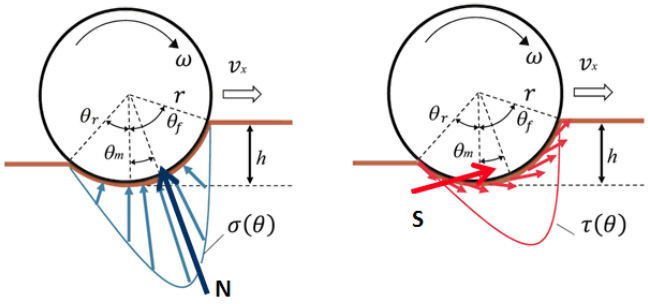

Fig. 8. Reprezentare a eforturilor normale și tangențiale ce acționează asupra pneului în pata de contact (cazul terenului deformabil). Forțele N și S sunt rezultantele eforturilor normale și tangențiale

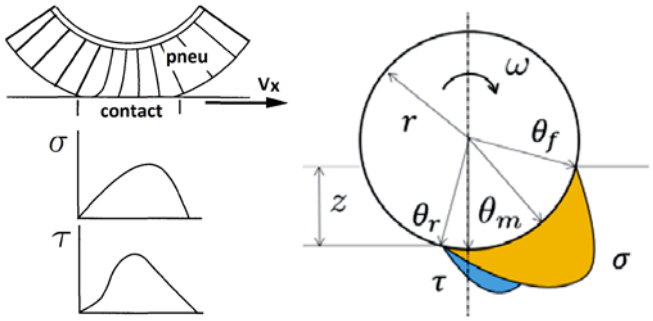

Fig. 9. Epura eforturilor normale și tangențiale ce acționează asupra pneului în pata de contact pe sol neted și a) nedeformabil; b) deformabil

Aceeași asimetrie apare în general și pentru cele tangențiale, însă din alte cauze, legate de mărimea deformației anvelopei. Astfel de distribuții asimetrice pot fi observate în figura 9, care conține reprezentări ce corespund interacțiunii pneului cu teren tare (stânga), respectiv cu teren deformabil (dreapta).

Nu numai pneurile, dar și solurile moi prezintă plasticitate, motiv pentru care rămân urme după trecerea roții (figura 3). De asemenea, pneul împinge solul moale, care, în apropierea petei de contact, "curge" în jos, în lateral, în spate (împins de rotația roții), dar și în față. Împingerea în această ultimă direcție, spre înainte, cu eventuala ridicare a nivelului solului în fața roții (figura 11, stânga) se numește buldozing în limba engleză. Multe dintre solurile moi au și o elasticitate mai mică sau mai mare, ele tinzând să revină parțial la forma pe care o aveau înainte de interacțiunea cu pneul (fig. 8 și 11, stânga).

Pe soluri moi (mai ales pe cele lipsite de coeziune), la forțele tangențiale ce acționează asupra pneului se adaugă forțele care tind să rupă și eventual chiar aruncă solul de sub pneu, ele fiind produse mai ales de interacțiunea crampoanelor sau a pintenilor care au pătruns în sol (figura 1). Orientarea acestor forțe este asemănătoare cu cea prezentată în partea dreaptă a figurii 8, având tot o dispunere tangențială, dar nu la periferia crampoanelor sau pintenilor pneului, ci mai aproape de axa de rotație a roții.

4.2 Rezultanta forțelor de contact

Integrând forțele elementare $\vec{\sigma}$ și $\vec{\tau}$ pe toată suprafața de contact, se obțin respectiv forțele rezultante $\vec{N}$ și $\vec{S}$ (figura 8) și, aproape întotdeauna, două momente de torsiune asociate (patru vectori). Fiind vectori alunecători, forțele $\vec{N}$ și $\vec{S}$ pot fi plasate oriunde pe suportul lor, fără ca aceasta să modifice valoarea momentului asociat.

Pe sol tare, neted și plan, cele două forțe vor avea punctele de aplicație pe suprafața pneului, întrucât toate forțele elementare (din care au rezultat) acționează în, respectiv asupra acestui plan. În schimb, pe sol deformabil, din cauza formei curbate a petei de contact, niciuna dintre forțele $\vec{N}$ și $\vec{S}$ nu va avea punctul de aplicație pe suprafața pneului (cum adesea se prezintă, greșit, în multe lucrări științifice), ci undeva în interiorul volumului limitat de pata de contact. În figura 8 pot fi văzute orientarea și punctul de aplicație aproximative ale acestor două forțe pentru cazul interacțiunii unei roți motoare cu sol moale. De menționat că la frânare sensul lui $\vec{S}$ se schimbă față de cel din figura 8 (ce corespunde unei roți motoare), ceea ce înseamnă și că o roată motoare tinde să se ridice la suprafața solului moale, pe când o roată frânată tinde sa se afunde. De asemenea, trebuie spus și că pe soluri deformabile vectorii $\vec{N}$ și $\vec{S}$ în general nu sunt perpendiculari (așa cum se întâmplă pe soluri tari). În plus, forțele rezultante $\vec{N}$ și $\vec{S}$ vor avea componente și în afara planului de reprezentare din figura 8, iar liniile lor suport pot să nu se intersecteze indiferent de tipul de sol pe care ar rula roata.

Prin însumarea eforturilor unitare σ și τ din întreaga pată de contact a pneului se va obține o rezultantă a tuturor forțelor de contact $\vec{R}=\vec{N}+\vec{S}$. Efectul acestei rezultante $\vec{R}$ față de un punct oarecare se evaluează prin așa numitul torsor al forței, adică perechea $(\vec{R},\ \vec{M})$ formată din forță și din momentul de torsiune dat de aceasta față de punctul considerat. În standardele [1] și [2] se impune ca acest punct să fie centrul contactului pneului cu solul, dar un interes deosebit ar putea prezenta și raportarea momentului la centrul roții sau la alte puncte.

Deoarece în cazul unei roți care rulează eforturilor unitare σ și τ au practic întotdeauna o distribuție asimetrică în pata de contact, înseamnă că acest cuplu rezultant $\vec{M}$ va fi nenul. Acesta va avea întotdeauna o componentă care se opune rotirii roții, dar și eventual alte două componente: una care tinde să culce roata pe una dintre laterale (moment de răsturnare) și o alta care tinde să bracheze roata (moment de girație sau de autoaliniere – figura 4). Dacă momentul $\vec{M}$ este foarte important pentru o singură roată (întrucât poate duce la solicitări mecanice mari), la considerarea efectelor asupra unei punți (două roți) sau asupra întregului vehicul (toate roțile), acestea fie se pot compensa reciproc (măcar parțial), fie se pot însuma. De modul în care se pot combina efectele acestor momente trebuie să țină cont inginerii proiectanți pentru a îmbunătăți comportamentul dinamic al vehiculului.

4.3 Planul aderenței

Așadar, rezultanta $\vec{R}$ este unica forță care, pe de o parte, nu va permite scufundarea roții, iar pe de altă parte, va asigura apariția forței de aderență necesare controlului vehiculului. Dacă se va alege un plan (pe care îl vom numi în continuare planul forței de aderență), atunci rezultanta $\vec{R}$, a tuturor interacțiunilor elementare dintre roată și sol, se poate descompune în două componente perpendiculare: forța normală $\vec{F}_z$ (numită și încărcarea normală a pneului), care este perpendiculară pe plan, și forța de aderență $\vec{F}_\mu$, care este cuprinsă în acest plan. Este important să se cunoască nu doar modul în care se generează forța de aderență, ci și locul în care apare aceasta (punctul său de aplicație). Pentru sol neted, existența acestui plan este aproape subînțeleasă, planul solului; însă în alte situații, alegerea planului forței de aderență nu mai este la fel de evidentă.

Din cele prezentate rezultă că specificarea planului în care va acționa forța de aderență este oarecum arbitrară: multe soluri sunt curbate sau denivelate, dar chiar și pe sol neted, dacă acesta este deformabil, planul aderenței se va afla sub planul solului. Excepția o reprezintă solul tare și neted, la care planul solului este și planul forței de aderență. De asemenea rezultă că poziția și mărimea forței de aderență depind de felul în care a fost definit planul forței de aderență. În acest plan se definesc axele perpendiculare x și y (motiv pentru care în continuare vom preciza acest plan prin indicele $_{xy}$). Axa x, care reprezintă intersecția acestui plan cu planul median al roții, este numită axă longitudinală a roții (și corespunde direcției de orientare a roții), iar axa y este numită axă transversală (figura 10).

Alte definiții utile se dau în continuare. Unghiul de cădere al roții este unghiul dintre planul normal pe planul forței de aderență ce conține axa x și planul median al roții (figura 10). Acesta este identic cu unghiul dintre axa roții și planul solului. Unghiul de alunecare laterală (sau unghiul de derivă) α al roții este unghiul dintre axa x și proiecția pe planul forței de aderență a vitezei $\vec{V}$ a centrului roții (figura 10). Direcția proiecției pe planul xy a vectorului $\vec{V}$ se numește direcția cursului (de deplasare a) roții.

În general, punctele de aplicație ale forțelor normală și de aderență sunt plasate lateral față de planul median al roții. Mai mult, aproape întotdeauna, forța $\vec{F}_z$ are punctul de aplicație în partea din față a petei de contact (figura 11), iar, pe soluri tari, forța $\vec{F}_\mu$ în partea din spate.

Fiecare dintre forțele $\vec{N}$ și $\vec{S}$ (componentele rezultantei $\vec{R}$ – a se revedea fig.

8), va fi descompusă într-o componentă (cu indicele $_{xy}$) utilă pentru mișcarea vehiculului, care va acționa în planul forței de aderență, și o alta (cu indicele $_z$) perpendiculară pe acest plan:

$$\vec{N} = \vec{N_z} + \vec{N_{xy}} \qquad \vec{S} = \vec{S_z} + \vec{S_{xy}} \tag{1}$$

Prin însumarea componentelor cu indicele z se obține forța normală pe plan (figura 10),

$$\vec{F_z} = \vec{N_z} + \vec{S_z}. \tag{2}$$

iar prin însumarea celor cu indicele xy, forța de aderență,

$$\vec{F_\mu} = \vec{S_{xy}} + \vec{N_{xy}} \tag{3}$$

Cazul interacțiunii roții cu sol neted și tare apare ca un caz particular al celui prezentat în figura 8: forța $\vec{N}=\vec{N_z}=\vec{F_z}$ este perpendiculară pe suprafața plană a solului (a se vedea și figura 11, dreapta), iar forța $\vec{S} = \vec{S_{xy}} = \vec{F_\mu}$ acționează chiar în acest plan. Probabil și pentru că acest caz este studiat cel mai mult, se recurge de obicei la obținerea separată a forțelor $\vec{N}$ și $\vec{S}$ (ca rezultante ale forțelor elementare normale și tangențiale) și apoi a rezultantei $\vec{M}$ a celor două și a momentului . Însă, același lucru se obține și dacă se consideră mai întâi efortul elementar total $\vec{\chi}=\vec{\sigma}+\vec{\tau}$ obținut prin însumarea efortului normal cu cel de forfecare din fiecare punct (cum ar fi pentru punctul P din figura 7) și apoi se procedează la integrarea tuturor acestora, cu obținerea acelorași rezultante $\vec{R}$ și $\vec{M}$.

Revenind la cazul general, forța normală $\vec{F_z}$ este perpendiculară pe planul xy, iar $\vec{F_\mu}$ este conținută de acesta și poate avea orice orientare. Ca urmare, forța de aderență $\vec{F_\mu}$ poate fi descompusă într-o componentă longitudinală $\vec{F_x}$ (conținută și de planul median al roții) și una transversală (laterală) $\vec{F_y}$ (figura 10):

$$\vec{F_\mu} = \vec{F_x} + \vec{F_y} \qquad F_\mu^2 = F_x^2 + F_y^2 \tag{4}$$

Procesele fizice ale aderenței

Recapitulând, forța de aderență a unei roți este o componentă a rezultantei eforturilor elementare care apar în pata de contact; deoarece rezultanta este o reacțiune (roata acționează asupra solului, iar solul răspunde cu o forță egală și de sens contrar), pentru a se genera forță de aderență este nevoie ca între roată și sol să existe simultan atât contact (adică o apăsare a roții asupra solului), cât și o anumită alunecare (sau măcar tendință de alunecare) considerată la nivelul global al întregii roți.

De notat că, chiar și în cazul lipsei tendinței de alunecare la nivelul întregii roți, deci cu forță de aderență nulă, în pata de contact vor exista alunecări elementare [8],[9], dar ale căror efecte se anulează reciproc. Pe când tendința de alunecare locală apare prin simpla deformare normală a pneului, tendința de alunecare globală poate fi generată prin aplicarea asupra roții a unui moment motor sau de frânare, a unei forțe exterioare sau prin schimbarea orientării roții față de direcția de mers (de ex. prin bracare).

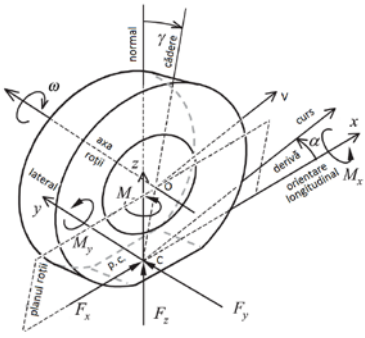

Fig. 10. Unghiurile de așezare ale pneului; forțele și momentele care acționează asupra pneului la contactul cu solul

Aici apare un aparent paradox: deși forța de aderență este cea care se opune alunecării (mișcării relative a) roții față de sol, aceasta nu poate exista în lipsa unei anumite alunecări (globale). În limba engleză, aspectul prezentat se indică succint prin binecunoscutul „No slip, no grip" (fără alunecare nu există aderență).

Pe soluri tari, forța de aderență este (așa cum se prezintă în multe definiții întâlnite) o forță de frecare, care apare în aria de contact dintre exteriorul pneului (crampoanelor sau pintenilor, pentru pneuri care nu sunt netede) și solul tare (care, în comparație cu pneul, poate fi considerat practic nedeformabil). Două modalități de solicitare sunt implicate în alunecarea relativă dintre elastomer (din care e realizat pneul) și suprafața solului. Asta înseamnă că pe soluri tari aderența are două componente principale: adeziunea[5] dintre moleculele pneului și cele ale solului (lipire la nivel molecular) și indentarea[6] (întrepătrunderea microasperităților solului și pneului la nivel milimetric și submilimetric).

Primul proces, adeziunea moleculară, apare la scara de circa o sutime de micron și este amplificat de alunecare. Cel de al doilea, indentarea, cunoscut și ca efect al rugozității solului [6], constă în excitarea repetată, rapidă, a materialului de către textura solului. Cauciucul este deformat atunci când alunecă peste asperitățile solului, ale căror dimensiuni variază de la 10 mm (macrotextură) la 1 micron (microtextură)[7]. Cuvântul indentare scoate în evidență tocmai penetrarea asperităților solului în cauciucul benzii pneului (sau invers, cauciucul umple parțial golurile existente la suprafața solului). Fiind alcătuit din material elastoplastic, pneul nu revine imediat la forma sa inițială după ce a fost deformat. De aceea, forțele de frecare care există între moleculele materialului pneului duc la un consum de energie, proces ce dezechilibrează forțele de contact de pe o parte și cealaltă a asperităților.

Indentarea poate conduce la generarea unei componente a aderenței atât prin redistribuirea eforturilor normale pe suprafața asperităților (cauzată de histerezisul cauciucului), cât și prin tendința de desprindere de material din sol sau din cauciucul anvelopei. Acest ultim proces [10], generat de interblocarea unor margini ale asperităților solului în pneu, poate duce și la abraziune, adică la desprinderea unor părți din pneu și, implicit, la uzarea acestuia (de ex. după abordarea mai energică a virajelor, abraziunea este indicată de existența unor particule de cauciuc pe asfalt sau a unei benzi de culoare mai închisă pe marginile pneurilor dinspre exteriorul vehiculului). Fenomenul se poate produce și invers, pneul rupând fragmente din sol și uzând (netezind) suprafața drumului. Evident, intensitatea abraziunii pneului și solului va fi diferită, fiind mai redusă pentru materialul mai dur.

În funcție de tipul solului, unul sau altul dintre cele două procese fizice, adeziune sau indentare, poate fi mai important decât celălalt. Pe lângă cele două componente amintite, în anumite condiții pot să mai apară și alte fenomene, precum interacțiunea cu alte elemente existente între pneu și solul tare: particule solide (nisip sau praf), semilichide (argilă, frunze umede, zăpadă proaspătă) sau lichide (apă, ulei). Comportându-se ca un lubrifiant sau ca niște corpuri de rostogolire, aceste impurități compromit în mare măsură aderența (mai ales adeziunea). De aceea, pe drumuri ude, doar datorită

5. Acest fenomen este similar cu cel al lipirii unei benzi adezive pe o suprafață netedă: este extrem de greu să fie desprinsă banda prin aplicarea unei forțe paralele cu suprafața, dar foarte ușor dacă forța acționează perpendicular pe suprafață. Existența procesului de adeziune este indicată de existența urmelor negre de cauciuc pe asfalt, respectiv de murdărirea cu noroi sau zăpadă a pneurilor.

6. Scris la fel, „indentation", în engleză și în franceză, de unde a fost importat și în limba română, cuvântul însemna la bază „crestătură cu formă rotunjită". În prezent, cuvântul este mai cunoscut la editarea textului (însemnând „împingerea" spre interior a primei linii a unui paragraf) sau la scrierea programelor pentru calculator.

7. În funcție de lungimea de undă λ a asperităților, profilul suprafeței carosabile este descris ca fiind denivelat (dacă λ>500 mm), megatextură (dacă 500 mm > λ > 50 mm), macrotextură (dacă 50 mm > λ > 0,5 mm) sau microtextură (dacă λ <0,5 mm).

indentării mai este posibilă generarea unor forțe de aderență acceptabile, întrucât adeziunea este foarte mult redusă. De asemenea, aderența este diminuată parțial și de vitezele ridicate de deplasare, deoarece timpul disponibil, atât pentru indentare cât și pentru realizarea legăturilor intermoleculare, se scurtează (de ex. la 130 km/h, un punct al unui pneu de autoturism rămâne în contact cu solul, în pata de contact, sub 4 ms; de aceea, nu e de mirare că pe asfalt uscat, la o creștere a vitezei tot cu 130 km/h, forța de aderență se reduce cu circa 12%). Un fenomen foarte cunoscut este cel denumit acvaplanare (sau hidroplanare). Într-un astfel de caz, forța de aderență înregistrează o scădere accentuată, adesea apropiindu-se de zero, cu atât mai importantă cu cât stratul de apă e mai gros și viteza de deplasare mai mare. Pentru reducerea efectelor acestui fenomen este foarte importantă capacitatea pneului de a elimina apa de sub el.

Cel de al treilea principal fenomen fizic responsabil pentru generarea aderenței apare pe sol moale, caz în care crampoanele sau pintenii pătrund în sol (figura 3) și tind, sau chiar reușesc, să-l rupă (figura 1). Ca urmare, pe lângă forța de frecare, apare și rezistența la forfecare a solului. Pe astfel de soluri, acest proces poate fi chiar mai important decât adeziunea și indentarea luate împreună. În plus, dacă se ajunge la ruperea solului, mai apare încă o componentă suplimentară dată de forța de aruncare a solului. Pneurile cu știfturi (fixate din construcție în anvelope) pot asigura o aderență superioară pe drumuri acoperite de zăpadă și gheață, deoarece presiunea locală mult mărită permite pătrunderea și fixarea știfturilor în stratul care acoperă drumul, eventual chiar ajungând la asfalt sau macadam. Foarte importantă pentru obținerea unei aderențe corespunzătoare este de asemenea și autocurățarea pneului la deplasarea pe soluri deformabile, deoarece se evită astfel ca pământul sau zăpada dintre crampoane să transforme pneul într-unul neted.

Așa cum s-a menționat, solul deformabil "curge", este forțat să se deplaseze parțial de sub pneu. Faptul că pneul sapă în solul moale poate avea atât consecințe defavorabile cât și favorabile pentru mobilitatea autovehiculului. Astfel, dacă se adâncește zona de sub roți, vehiculul fie poate rămâne suspendat, fie roțile pot ajunge la o zonă mai tare și mai bine legată, ca de exemplu în vaduri, pe terenuri noroioase sau pe drumuri acoperite cu zăpadă. Cu alte cuvinte, o roată ce rulează pe sol deformabil încearcă să iasă dintr-o groapă pe care și-a săpat-o singură. Se poate observa că roata, fiind parțial scufundată și încercând să revină la suprafață (figura 8), se comportă pe sol orizontal ca și când ar urca o anumită rampă pe sol tare [11].

Din cauza crampoanelor sau pintenilor, mărimea forței de aderență și distanța la care acționează aceasta față de axa roții pot să se modifice periodic la rotirea roții. Pentru explicarea acestui fenomen sunt necesare modele mai complicate (precum cel din lucrarea [12]), dar acestea nu vor fi analizate aici.

O noțiune frecvent utilizată este cea de forță de tracțiune (netă) a roții, care este componenta forței de aderență $\vec{F_\mu}$ pe direcția cursului roții [1]

$F_t = F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha$, (5) unde α este unghiul de derivă al pneului. Forța de tracțiune negativă se numește și forță de frânare. Dacă unghiurile de cădere și de derivă sunt nule, atunci componenta longitudinală a forței de aderență este chiar forța de tracțiune . Probabil și din această cauză, cele două forțe și sunt confundate adesea.

5. RAZELE ROȚII

Din ceea ce s-a prezentat anterior rezultă că mărimile și orientările forțelor normală și de aderență, $\vec{F_Z}$ și $\vec{F_\mu}$, ca și majoritatea razelor de lucru ale pneului, depind de poziția planului xy. Se pune întrebarea: cum este (sau cum ar trebui) adoptat și definit acest plan? Este evident că definirea lui ar trebui corelată direct cu o direcție de deplasare importantă, dar nu este clar a cui mișcare ar trebui considerată: a întregului vehicul sau doar a roții.

Pentru soluri netede, definirea planului xy, în care acționează forța de aderență, este logică și relativ simplă: un plan paralel cu planul solului. Aceasta și pentru că direcțiile dorite de deplasare sunt paralele cu suprafața plană xy, atât pentru întregul vehicul cât și pentru roată.

Pentru o suprafață de rulare plană și rigidă, planul forței de aderență este considerat implicit planul solului [1],[2], în vreme ce, pentru o suprafață de rulare plană și deformabilă, se consideră un plan paralel cu planul solului, dar aflat mai jos de acesta. Așadar, pe sol tare și neted forța de aderență acționează chiar la nivelul solului (deoarece toate forțele elementare au punctele de aplicare pe acest plan – figurile 9, *stânga* și 11, *dreapta*), iar pe sol moale și neted, mai jos de acesta (deoarece rezultanta tuturor forțelor elementare va avea punctul de aplicare în interiorul volumului limitat de pata de contact cu forma de cupă – figurile 8 și 11, stânga). În figura 11 se pot vedea forțele $\vec{F_Z}$ și $\vec{F_X}$ care acționează asupra roții la contactul cu un sol neted și orizontal.

Definirea unor mărimi foarte importante pentru studiul dinamicii autovehiculelor (precum razele roților, forța la roată sau forța de rezistență la rulare) se bazează pe presupunerea (aproape întotdeauna nemenționată) că planului xy al forței de aderență este paralel cu planul solului. Inclusiv cele două standarde SAE [1] și ISTVS [2] abordează doar rularea roții pe un sol neted și orizontal. Mai mult, în cele două standarde practic se consideră doar cazul „roții drepte" (cu unghiurile de cădere și de derivă nule).

În continuare, se menționează foarte rapid definițiile unor raze ale roții

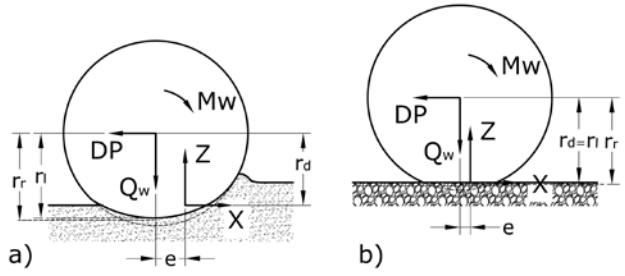

Fig. 11. Forțele și momentele care acționează asupra unei roți plasate pe un sol neted, orizontal și: a) deformabil, respectiv b) nedeformabil

(mai multe detalii: [13],[3]):

- raza liberă nominală r_0 – raza pneului neîncărcat, umflat la presiunea nominală; numită și raza geometrică;
- raza pneului încărcat r_l – distanța de la axa de rotație a roții la un punct particular al pneului; aici standardele nu se pun de acord dacă acest punct corespunde centrului contactului [1], deformației maxime a solului pe direcție perpendiculară pe planul solului [2] sau deformației maxime a pneului [14] (prin utilizarea unor senzori montați în interiorul pneului, măsurarea deformației pneului este posibilă chiar și pe teren moale [15],[16],[17]); doar pe sol nedeformabil și plan, cele trei valori ar fi egale; această rază poate fi indicată atât pentru pneul care rulează, cât și în condiții statice; r_l măsurată în condiții statice pentru pneul aflat la încărcarea maximă admisă de fabricant se numește raza statică r_s;
- raza dinamică r_d – brațul componentei longitudinale (a forței de aderență) față de axa de rotație a roții, adică distanța dintre axa de rotație și suportul forței (figurile 11 și 13);
- raza de rulare (efectivă) $r_e = V_x/\omega$ este raportul dintre V_x, viteza centrului roții pe direcția x, și ω, viteza unghiulară instantanee a roții; rezultă că r_e poate lua valori între 0 (roată cu patinare totală – se rotește dar nu avansează) și ∞ (roată frânată blocată – nu se rotește dar avansează); valoarea medie (pentru o rotație) a razei de rulare este circumferința de rulare

(distanța pe care o parcurge centrul roții la o rotație) împărțită la 2π.

- raza (de rulare) cinematică $r_k = V_x/\omega_0$ este valoarea razei de rulare efective r_e pentru cazul particular al unei "roți drepte" cu rulare pură (o "roată dreaptă" are unghiurile de cădere și de alunecare nule, iar regimul de rulare pură corespunde unei valori nule a componentei $\overrightarrow{F_x}$ a forței de aderență; prin urmare, o "roată dreaptă" cu rulare pură nu produce forță de aderență, adică $\overrightarrow{F_\mu}=0$, iar $V_y=0$); viteza unghiulară ω_0 cu care trebuie să se rotească "roata dreaptă" pentru ca centrul său să se deplaseze cu viteza $V_x=V$ se numește viteza unghiulară de referință a "roți drepte" cu rulare pură); semnificația geometrică (pentru "roata dreaptă" cu rulare pură) este distanța de la centrul roții la axa instantanee de rotație a roții (axa atașată imaginar roții care are viteză de translație nulă); această axă se află ceva mai jos de axa y din figura 10.

Din definițiile prezentate se poate observa că rl și rd sunt mai degrabă niște distanțe (cu importanță deosebită, e drept) decât razele unor cercuri asociate roții.

Razele cinematică și dinamică au o importanță deosebită pentru calculul performanțelor dinamice ale autovehiculelor: raza de rulare cinematică rk stă la baza determinării mărimii forței de aderență (prin definirea alunecării longitudinale a roții față de cale), iar prin raza dinamică rd se încearcă legarea mărimii componentei longitudinale F_x a forței de aderență (și indirect a forței de tracțiune F_t) de valoarea instantanee a momentului M_R aplicat roții. Însă este necesar să se facă distincție între aceste raze, întrucât ele nu sunt egale. De aceea este extrem de necesară atât cunoașterea mărimii acestora (prin măsurare sau estimare teoretică), cât și modul în care se modifică atunci când se schimbă condițiile de rulare (precum încărcarea normală sau presiunea de umflare).

Pe baza a numeroase studii se poate indica faptul că

$r_d \le r_l < r_k < r_0$,(6) (figura 11), iar valorile razelor rk și (mai ales) r_d se pot modifica semnificativ chiar în timpul deplasării, așa cum se poate vedea și din figurile 12 și 13. Cu toate că au semnificații și dimensiuni diferite, în multe lucrări de specialitate se fac adesea confuzii între aceste două raze. În plus, pentru calcule se utilizează o singură valoare pentru ambele (adesea considerată constantă în diferite condiții de utilizare a roții) [18], ceea ce nu este acceptabil în multe situații (așa cum s-a arătat de ex. în [13] și [19]). De multe ori, această raza de calcul este denumită rază efectivă, producând încă o confuzie, din cauza asemănării numelui, cu raza de rulare efectivă.

Mărimea razei de rulare cinematice rk depinde de factori de proiectare și constructivi (construcție radială sau diagonală, proporțiile secțiunii carcasei), funcționali (presiune de umflare, încărcare normală, viteză) sau grad de uzură. Este larg acceptată ipoteza că raza de rulare cinematică este strâns legată de lungimea centurii pneului. Întrucât centura conține fibre de cord (flexibile, dar inextensibile), lungimea sa rămâne aproape constantă pe toată durata de viață a pneului. Dacă se depășește o încărcare minimă a pneului, raza de rulare cinematică rămâne aproape constantă și egală cu raza benzii de rulare [20].

Pornind de la aceste constatări, în lucrări precum [21],[22] se dau relații de calcul care estimează raza de rulare cinematică. Pe de altă parte, măsurarea directă a razei cinematice este dificilă și necesită aparatură complexă și de precizie. De aceea, adoptarea valorii pentru calcule se bazează mai ales pe valorile circumferinței de rulare indicate de fabricant S_f. Această lungime se măsoară la viteza de 60 km/h și corespunde unei "roți drepte" (cu unghiuri nule de alunecare și de cădere), care rulează liber (nu este antrenată sau frânată). Deoarece acestei valori îi corespunde o mică alunecare longitudinală negativă σ_x, în fapt raza de rulare cinematică r_k (ce corespunde rulării pure) va fi (foarte puțin) mai mică: $r_k=(1+\sigma_x)S_f/(2\pi)$; pentru condițiile de test (suprafață netedă și tare), $\sigma x \approx -(0{,}001 \dots 0{,}002)$. De aceea, valoarea $S_f/(2\pi)$ poate fi folosită pentru a aproxima raza de rulare cinematică r_k dacă solul și condițiile de rulare sunt asemănătoare cu cele utilizate pe stand de către fabricanții de pneuri. Însă, dacă rularea roții presupune alunecări însemnate (atât longitudinale, cât și laterale), dar mai ales unghiuri de cădere nenule, aproximarea $r_k \approx S_f/(2\pi)$ nu mai este justificată și nu ar trebui făcută.

În [21] se indică următoarele valori estimative pentru raza de rulare cinematică (a "roții drepte"): $r_k \approx 0.96$ r0, pentru pneuri diagonale, respectiv rk≈0.98 r0 pentru pneuri radiale. Aceeași valoare, de 98% din raza liberă r_0 a pneului, este indicată și în [23].

Prin prelucrarea statistică a circumferinței de rulare indicate de mai mulți fabricanți pentru 1608 tipuri de pneuri pentru autoturism, în lucrarea [24] se indică faptul că raza de rulare rezultată are valoarea cea mai probabilă $r_{kf}=0{,}9724\ r_{0m}$ (aici r_{0m} indică raza liberă calculată pe baza marcajelor de pe pneuri, care, conform cu același studiu, diferă în medie doar cu 0,5% față de raza liberă r_0 indicată de fabricanți în mod direct).

Lucrarea dovedește și că relația empirică recomandată în unele publicații (de ex. [21],[22]), $r_k=(2r_0+r_s)/3=r_0-\delta/3$ (r_s fiind raza statică, $\delta=F_z/k_z$ deformația normală, iar k_z rigiditatea radială), poate fi utilizată cu succes, deoarece acest rezultat, obținut cu datele statistice, este $r_k=0{,}9745\ r_{0m}$, deci foarte apropiat de cel prezentat puțin mai sus (diferență medie de doar 0,2%).

Alte studii recente, precum [25], arată că, pe măsură ce pneul se uzează, raza

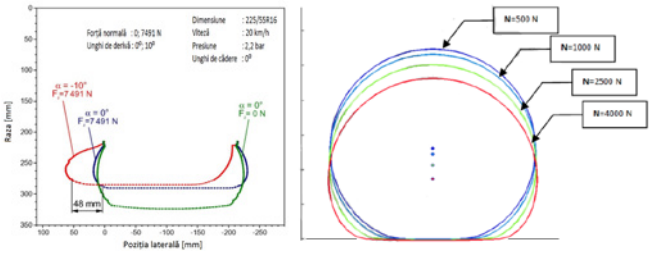

Fig. 12. Deformarea pneului de autoturism cauzată atât de modificarea încărcării normale cât și de alunecare (laterală în acest exemplu) conduce la modificarea razei dinamice a pneului cu 25 … 30 mm în condiții normale de utilizare

cinematică (pe sol tare și plan) se modifică mai puțin decât ne-am aștepta (la fiecare mm de uzură a pneului, rk se modifică cu doar 0,34 mm; tot lucrarea [25] arată că, pentru un pneu de autoturism, la scăderea presiunii de la 2,3 bar la 1,8 bar raza de rulare cinematică rk scade cu 0,62 mm (la o rază medie de 323 mm aceasta înseamnă 0,19%). Aceste rezultate arată că schimbările presiunii de umflare au un impact mai mare asupra razei de rulare cinematice decât modificările grosimii centurii (produse de uzura pneului). Cel mai plauzibil fenomen care poate explica micșorarea razei de rulare la creșterea încărcării normale a pneului este alunecarea locală.

Analizând acum raza dinamică, trebuie menționat că aceasta este intens utilizată în calculele de proiectare a autovehiculelor.

În unele lucrări, în locul razei dinamice r_d se indică raza pneului încărcat r_l, ceea ce ar putea fi adevărat doar pentru pneuri care rulează pe soluri tari și plane și au unghi de cădere mic. În [21] se indică următoarele valori estimative: $r_l \approx 0{,}92 r_0$ pentru pneuri radiale, respectiv $r_l \approx 0{,}94 r_0$ pentru pneuri diagonale.

Referindu-se cu precădere la drumuri (soluri tari), literatura de specialitate ([18],[26]) recoman-dă următoarele valori medii ale razei dinamice în funcție de raza liberă: $r_d=(0{,}93 \dots 0{,}935)r_0$ pentru pneuri de joasă presiune; $r_d=(0{,}945 \dots 0{,}95)r_0$ pentru pneuri de înaltă presiune.

Privind însă figura 12, în care se prezintă deformația pneului cu unghi de cădere nul pe sol tare sub influența forței normale F_z și a componentei F_y a forței de aderență, se observă că raza dinamică se poate modifica foarte mult

[27],[28],[29] (chiar în condiții normale sunt posibile schimbări de ±10%), ceea ce ne determină să luăm recomandările anterioare doar ca orientative.

Pe lângă forțele normală și de aderență, indicate anterior, mărimea razei dinamice r_d depinde și de alți factori importanți (printre care și cei care afectează raza cinematică), care se pot schimba rapid, chiar în timpul deplasării. Printre aceștia trebuie amintiți uzura, viteza (mai ales cea de rotație), temperatura, presiunea aerului interior, mărimea și orientarea forței de aderență (prin momentul la roată și unghiul de derivă), unghiul de cădere și caracteristicile terenului (pe soluri moi).

În figura 13 se prezintă câteva moduri în care razele pneurilor (dinamică, a pneului încărcat, dar și cea cinematică) sunt puternic afectate de câțiva parametri funcționali: unghi de cădere, forță de tracțiune (moment la roată), forță laterală. Așa cum se poate vedea, rularea în anumite cazuri particulare poate face practic inacceptabile și inutilizabile definițiile existente pentru principalele raze ale pneurilor. De exemplu, schimbarea unghiului de cădere (fenomen observabil mai ales la motociclete) face ca modul de definire a razei de rulare cinematice r_k să nască controverse și probleme în privința calculelor performanțelor dinamice [30].

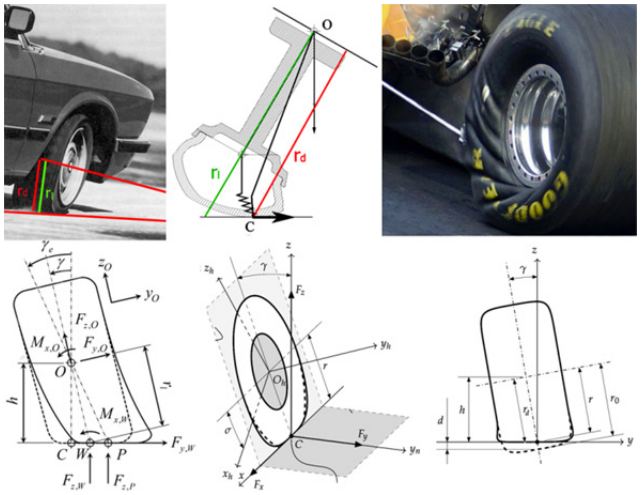

Fig. 13. Raza dinamică a roții se modifică în funcție de numeroși factori, printre care unghiul de cădere și mărimea și orientarea forței de aderență

Concluzionând analizarea razelor, numeroase studii teoretice și experimentale (ca de ex. [31],[32], [22],[33],[34],[35]) arată că, spre deosebire de raza dinamică r_d, raza cinematică este mult mai puțin sensibilă la schimbarea presiunii aerului interior și a încărcării normale F_z (mai ales la valori apropiate de încărcarea statică). De aceea, r_k este folosită și de algoritmii de funcționare ai majorității sistemelor de siguranță activă (precum ABS, ASR, ESP), care sunt utilizate în prezent pe autovehicule [31]. În plus, acești algoritmi sunt capabili ca, pe baza informațiilor de la senzori, să efectueze corecții ale valorilor r_k chiar în timpul deplasării.

6. MĂRIMEA FORȚEI DE ADERENȚĂ ȘI PARAMETRII CARE O INFLUENȚEAZĂ

Numeroasele încercări experimentale precum și modelele teoretice realizate de-a lungul anilor au indicat că mărimea forței de aderență depinde în principal de apăsarea roții pe sol (forța normală), de calitatea interacțiunii pneu–sol (prin coeficientul de aderență μ), de coeficientul de alunecare totală s și de unghiul de cădere [36],[30],[13],[3].

În cazul unui unghi de cădere nul, forța de aderență poate fi calculată cu ecuația

$$F_\mu = F_Z\,\mu(F_Z)\,\xi(s) = F_{\mu max}(F_Z)\,\xi(s). \quad (7)$$

Mărimile care apar în această relație vor fi prezentate în continuare.

Forța normală F_Z apare ca reacțiune la tendința de apăsare spre sol (de scufundare) produsă de efectul însumat al gravitației (greutății) și al aerului atmosferic (portanței). Deși caracteristica de rigiditate radială a pneului (F_Z în funcție de δ_Z) este (cel puțin teoretic) ușor degresivă, se poate spune că pentru încărcări normale (de ex. de până la dublul încărcării statice), rigiditatea pneului nu depinde de încărcare ($k_Z \approx$const). Altfel spus, forța normală este proporțională cu deformația: $F_Z = k_Z\,\delta_Z$. Rigiditatea radială dinamică (în rulare) a pneului e ceva mai mare decât cea statică, dar valorile rămân apropiate și sunt aproape constante pentru vitezele normale de deplasare (de ex. mai mici de 150 km/h pentru autoturisme) [37],[17].

Natura suprafeței de contact intră în calculul forței de aderență prin factorul numit coeficient de aderență μ. Acesta, $\mu = F_{\mu max}/F_Z$, este raportul adimensional dintre forța de aderență maximă și forța normală (pe soluri tari și plane, este chiar coeficientul de frecare). El definește proprietățile de interacțiune ale diferitelor materiale din perechea pneu-sol în condițiile de mediu considerate. Acest coeficient depinde în principal de natura suprafeței de rulare, de starea pneurilor, de viteză și de condițiile meteo.

Ca și în cazul coeficientului de frecare, utilizarea coeficientului de aderență sugerează că forța de aderență ar fi independentă de forța normală F_Z. Însă, acest comportament este adevărat doar parțial. Într-adevăr, la creșterea forței normale, μ scade (cu precădere pe soluri ude). Tipic, pe asfalt uscat, o creștere cu 10% a forței normale produce o reducere cu circa 1% a coeficientului de aderență [38]. De exemplu, dacă se dublează încărcarea pneului, forța de aderență crește doar de circa 1,5…1,7 ori.

La schimbarea poziției lor în pata de contact, diferitele puncte ale pneului sunt supuse unor alunecări locale, care au direcții și mărimi diferite (cauzate de modul în care se deformează pneul). Reducerea coeficientului de aderență la creșterea încărcării este cauzată în primul rând de existența acestor alunecări care, prin solicitări ce se anulează reciproc [39], "consumă" tot mai mult din potențialul aderenței.

Distribuția alunecărilor locale este responsabilă și de faptul că, pe drumuri uscate, pneurile noi au o aderență ceva mai mică față de cele uzate. Tot aceasta distribuție determină o ușoară sensibilitate a coeficientului de aderență față de direcția în care alunecă pneul: pe direcție longitudinală μ este cu puțin mai mare decât pe direcție laterală. Deoarece diferențele sunt reduse, se vorbește destul de rar despre elipsa aderenței, termenul cel mai folosit fiind cercul aderenței (sau cercul lui Kamm), prin aceasta indicându-se că forța maximă de aderență este (aproape) egală în orice direcție este orientată față de pneu.

Totuși, pentru forță normală cu valori apropiate de încărcarea statică, coeficientul de aderență poate fi considerat constant. În aceste condiții normale de încărcare, μ poate avea o largă plajă de valori, fiind cuprins, de ex. pentru pneuri de autoturism, între 0,1 (zăpada sau gheață umede) și 1,1 (asfalt sau beton uscate).

Forța de aderență normalizată $\xi = F_\mu/F_{\mu max}$ depinde de coeficientul de alunecare totală s. Reprezentarea sa grafică, numită caracteristică de rulare a pneului, are în general o formă apropiată de cea din figura 14. Valoarea lui ξ este limitată la domeniul -1…+1 (valorile pozitive indică existența unor forțe de tracțiune, iar cele negative, forțe de frânare).

La descrierea proceselor specifice frecării (deci și aderenței), se face distincție între frecarea statică și frecarea dinamică. La interacțiunea dintre pneu și sol, forța de frecare ce apare pe o suprafață elementară de pneu va fi mai mare dacă acea zonă nu alunecă față de sol decât dacă alunecă. La creșterea coeficientului de alunecare totală, tot mai multe porțiuni din pata de contact vor aluneca,

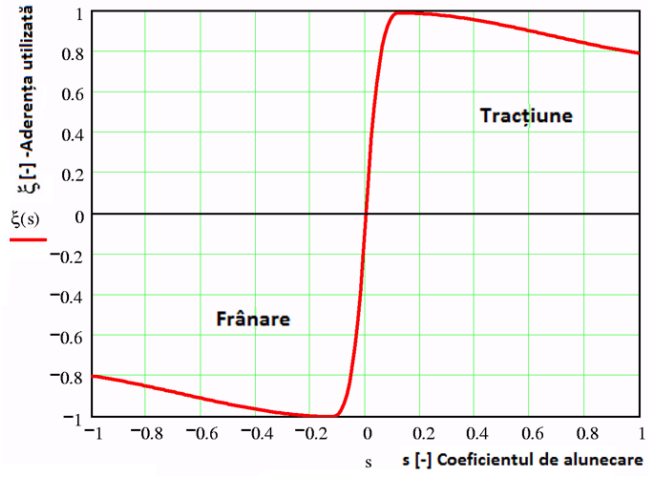

Fig. 14. Forma tipică a caracteristicii de rulare a pneului

ceea ce explică reducerea forței de aderență[8], așa cum se poate observa în părțile din stânga și din dreapta ale figurii 14.

Coeficientul de alunecare totală s reprezintă un indicator al deformației complexe la care este supus pneul, iar această deformație este corelată direct cu forțele și momentele care solicită pneul. Astfel se poate nota că, pentru unghi de cădere nul, forța de aderență apare doar dacă coeficientul de alunecare totală s nu este zero (fără alunecare nu există forță de aderență). Coeficientul de alunecare totală s are valori în domeniul -1…+1 (uneori trebuie limitat la acesta). Dacă trece prin origine, graficul indică faptul că s a fost determinat pentru roată în regim de rulare pură.

În cazul solurilor tari și plane, pentru descrierea dependenței forței de aderență normalizate ξ (și a momentelor care apar în pata de contact) în funcție de coeficientul de alunecare totală s există numeroase formule semiempirice: acestea utilizează date obținute din măsurători și metode de interpolare și regresie pentru estimarea valorilor pe domeniile neacoperite experimental. Dintre acestea, probabil cea mai cunoscută este Magic Formula [41],[20]. Mai multe detalii despre această formulă și despre alte posibilități propuse pentru modelarea caracteristicii de rulare a pneului pot fi găsite în [42],[40],[13].

Viteza de alunecare a pneului este diferența dintre viteza reală $\vec{V}$ și cea teoretică (periferică) $\vec{V_t}$ ale centrului roții, figura 15. Acest vector $\vec{V_s}=\vec{V}-\vec{V_t}$ arată în ce direcție și cât de repede alunecă roata față de sol. Deoarece roata acționează asupra solului în această direcție, solul reacționează și o împinge în direcția opusă, generând astfel forța de aderență (figura 15).

Deși coeficientul de alunecare s este numit adesea doar "alunecare", acesta nu trebuie confundat cu viteza de alunecare a pneului, prezentată adineauri.

Coeficientul de alunecare totală este definit ca raport al vitezei de alunecare a pneului și vitezei reale a centrului roții pe direcția longitudinală

$$s=\frac{V_s}{V_x} \quad (8)$$

și are două componente (a se revedea figura 15). Una este coeficientul de alunecare laterală

$$s_y=\frac{V_{sy}}{V_x}=\tan\alpha, \quad (9)$$

(α fiind unghiul de alunecare laterală), iar cealaltă, coeficientul de alunecare longitudinală

$$s_x=\frac{V_{sx}}{V_x}=\frac{V_t-V_x}{max(V_t,V_x)}=\frac{r_k\omega-V_x}{max(r_k\omega,V_x)}=\frac{r_k-r_e}{max(r_k,r_e)}. \quad (10)$$

Aici, viteza periferică Vt=rk ω indică viteza medie la care particulele benzii de rulare sunt transportate prin pata de contact.

Ecuația 10 arată și de ce la viteză mai mare a autovehiculului, șansa ca roata să patineze accentuat e mai redusă: este necesară o modificare mai însemnată a vitezei unghiulare ω a roții (sau a vitezei periferice V_t) pentru ca s_x să se apropie de valoarea 1 și roata să piardă o parte din aderență (figura 14).

Pe baza celor două componente se poate calcula valoarea totală a coeficientului de alunecare, adică $s=\sqrt{s_x^2+s_y^2}$, iar apoi, cu ajutorul funcției reprezentate în figura 14, forța de aderență normalizată ξ și, în final, cu ajutorul ecuației 7, forța de aderență totală precum și componentele F_x și F_y ale acesteia pe direcțiile longitudinală și laterală.

Trebuie menționat că valoarea maximă a aderenței se atinge (figura 14) la valori ale coeficientului de alunecare laterală s_y=4…7% la pneurile moderne pentru autoturisme, respectiv 6…10% la cele pentru autocamioane. În conformitate cu ecuația 9, aceasta înseamnă că forță laterală maximă se obține la unghiuri de alunecare laterală α=7…12° la autoturisme și de 10…18° la autocamioane [6]. Peste aceste valori, forța de aderență scade. De notat că aderența se deteriorează la valori mari ale coeficientului de alunecare s și

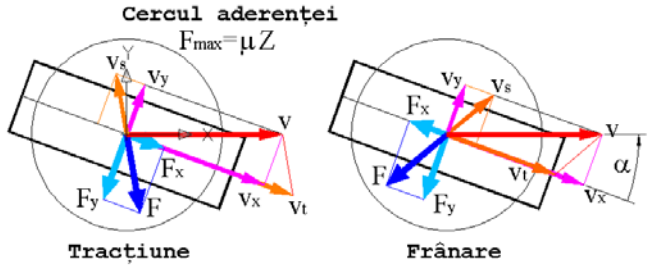

Fig. 15. Schemă pentru explicarea legăturii dintre mărimile și orientările vitezelor (centrului roții) și orientarea forței de aderență (în pata de contact)

datorită creșterii accentuate a temperaturii în microzonele de contact [6]. Ca urmare, mici porțiuni de cauciuc se pot rupe sau arde, pneul începând să lase urme negre pe soluri tari și să scoată fum.

Prin ecuația 7 se stabilește o legătură funcțională între cinematica roții (mai precis, cinematica jantei, considerate nedeformabilă [30]) și mărimea forței de aderență F_μ (a se revedea figura 10) și, ca o consecință, și a celei de tracțiune netă Ft. Deoarece în regimuri tranzitorii deformațiile pneului se modifică și, de aceea, există mișcări relative ale petei de contact față de centrul roții, între vitezele centrului roții și cele de la nivelul zonei de contact apar mici diferențe. De aceea, în regimuri tranzitorii valorile calculate cu ecuațiile anterioare pentru forțele și momentele ce solicită pneul pot diferi ușor de cele reale, obținute prin măsurare.

De asemenea, reamintindu-ne că forța de aderență apare doar dacă există contact între pneu și sol, la desprinderea roții de sol forța de contact dispare. Însă, la reintrarea în contact, pneul nu produce imediat forța de aderență la care ne-am aștepta, ci doar după parcurgerea unei distanțe (numite lungime de intrare, aproximativ egală cu raza roții [43]). Într-adevăr, roata trebuie să se deplaseze cu o anumită distanță din momentul reluării contactului pentru ca s, coeficientul de alunecare din ecuația 7, să se modifice de la zero la valoarea de regim și să determine astfel creșterea forței de aderență[9].

Mai multe detalii despre forța de aderență și despre dependența ei de raza de

8. Exprimările „a pierde aderența" și „a rupe aderența", întâlnite adesea în vorbire automobilistică, se referă la funcționarea pneului cu o valoare mare a coeficientului de alunecare totală, situație în care forța de aderență scade, iar pneul lasă urme negre pe asfalt și produce un zgomot specific (un „scârțâit"). Prima dintre exprimările enumerate (pierderea) se referă la alunecarea laterală (când vehiculul poate derapa) și uneori la frânare, iar cea de a doua (ruperea), la demaraj, în cazul în care se aplică un moment motor mai mare decât poate prelua roata. Evident, se „pierde" (se irosește) doar o mică parte din forța de aderență, cea mai mare parte rămânând disponibilă.

9. Un coleg, bun cunoscător al matematicii, m-a întrebat: cât e aderența la pornire? Apoi a continuat: alunecarea este zero pe zero (la pornire ω=0 și Vt=0 în ecuația 10), deci nu se poate spune cât de mare este forța de aderență; valoarea este nedeterminată. După câteva secunde i-am dat un răspuns, pe care îl reiau (sper mai bine) și aici.

rulare cinematică r_k pot fi găsite în lucrările [13] și [3].

Așa cum s-a arătat în [19], modificarea coeficientului de alunecare s este singura posibilitate pe care o are la dispoziție șoferul pentru a-și conduce mașina (așa cum dorește). Însă, deoarece acest coeficient depinde de "istoria" deplasării vehiculului (adică de ceea ce s-a întâmplat până în momentul curent), pentru a schimba valorile componentelor lui s trebuie să treacă un anumit timp, adică autovehiculul va răspunde cu o anumită întârziere și nelinear, atât pentru virare, cât și pentru modificarea vitezei.

Revenind la mărimile care influențează forța de aderență, trebuie să dăm câteva informații și despre unghiul de cădere (a se revedea figura 10). O valoare nenulă a acestuia (planul roții nu este perpendicular pe planul forței de aderență), va duce la modificarea mărimii forței de aderență. Așa cum un trunchi de con rostogolit pe un plan ar tinde să se deplaseze în cerc, și roata cu unghi de cădere nenul va avea tendința să vireze spre partea în care axa roții este înclinată în jos. Ca urmare, pneul va genera înspre acea parte o forță ΔF care se va adăuga sau scădea din forța de aderență produsă de alunecare (și calculată cu ecuația 7).

Pentru valori mici ale unghiului de cădere, de doar câteva grade, modificarea ΔF a forței este aproximativ proporțională cu acesta și atinge valoarea staționară aproape instantaneu cu modificarea valorii unghiului. Generând forța ΔF doar spre lateral, unghiul de cădere va ajuta virarea vehiculului dacă axa roții este înclinată în jos în partea dinspre interiorul virajului (caz în care unghiul de cădere este considerat negativ), dar va influența foarte puțin componenta longitudinală a forței de aderență. Ca urmare, aderența maximă se obține la mersul în linie dreaptă pentru unghi de cădere nul, iar în curbe la valori de circa -2°…-0,5° [38],[44]. La pneurile diagonale pentru autocamioane, forța laterală generată de un unghi mic de cădere reprezintă aproximativ o cincime din valoarea forței laterale obținute la un unghi de alunecare egal, iar la cele radiale influența este mai redusă [44]. La toate tipurile de pneuri, forța ΔF se modifică foarte puțin cu viteza și încărcarea normală. În schimb presiunea aerului din interior o afectează mult la pneurile diagonale și mai puțin la cele radiale [38]. De asemenea, tendința de bracare indusă de unghiul de cădere este în general mai accentuată la roțile cu lățime mai mare.

La un vehicul cu un reglaj corect, ce rulează pe un sol tare și plat, forțele suplimentare generate de unghiurile de cădere la roțile aceleiași punți se echilibrează reciproc în general. Însă, pe teren denivelat poate apărea un fenomen supărător: rezultanta forțelor laterale pentru o punte poate să aibă valori variabile și să împingă vehiculul într-o parte sau alta, făcându-l să devieze de la traiectoria dorită și să devină instabil[10].

Așadar, dacă pentru roată se cunosc forța normală, coeficientul de aderență, vitezele de translație și unghiulară, unghiul de derivă, raza cinematică și unghiul de cădere, atunci se pot obține atât mărimea, cât și orientarea forței de aderență.

7. FORȚA LA ROATĂ

Fiind brațul forței de tracțiune nete față de axa de rotație a roții, raza dinamică rd este de asemenea foarte importantă pentru performanțele autovehiculului întrucât cu ajutorul ei se definește forța la roată ca raport al momentului la roată și razei dinamice,

$$F_R = M_R / r_d \,. \quad (11)$$

În literatura de limbă engleză, forța la roată este numită forță de tracțiune brută.

Analizând mișcarea de rotație (de ex. pe baza figurii 11) și aplicând legea a doua a dinamicii, se obține ecuația de mișcare a roții pentru acest grad de libertate [19]:

$$J_R \varepsilon_R = M_R - F_z e - F_x r_d \quad (12)$$

în care JR reprezintă momentul de inerție echivalent al roții, ε_R – accelerația unghiulară, M_R – momentul la roată, e – brațul forței normale (distanța pe direcția longitudinală x dintre axa de rotație și suportul forței normale F_z).

Existența termenului din partea stângă a ecuației 12 arată că legătura funcțională dintre momentul la roată M_R și componenta longitudinală F_x a forței de aderență este una mult mai complexă decât o dependență de proporționalitate (sau măcar de linearitate, cum se presupune adesea), ceea ce înseamnă un răspuns nelinear și întârziat al forței de tracțiune F_t la modificarea lui M_R, adică la comenzile conducătorului [19].

8. REZISTENȚA LA RULARE

Analizând ecuația anterioară se poate observa că termenul

$$Z_e = M_r \quad (13)$$

reprezintă un moment rezistent, care se opune rostogolirii roții și care se numește moment de rezistență la rulare.

Din cauza plasticității materialului pneului, cunoscută și sub denumirea de histerezis, energia utilizată la comprimarea pneului (în partea din față a petei de contact) este mai mare decât energia recuperată la revenirea pneului la forma sa inițială. Așa cum s-a menționat deja, aceasta determină o distribuție asimetrică a forțelor elementare normale (și, pe sol moale, și a celor de forfecare), ceea ce face ca forța normală rezultantă să fie plasată în partea din față a petei de contact cu distanța "e", amintită anterior.

Împărțind ecuația 12 cu raza dinamică r_d, se obține

$$J_R \varepsilon_R / r_d = M_R / r_d - M_r / r_d - F_x = F_R - F_z e / r_d - F_x = F_R - F_z f - F_x = F_R - R_r - F_x \,, \quad (14)$$

în care termenul $J_R \varepsilon_R / rd$ este echivalent cu o forță de inerție, $f = e / r_d$ se numește coeficient de rezistență la rulare, iar $R_r = F_z f$, forță de rezistență la rulare[11]. Fiind un coeficient adimensional, f este un parametru potrivit pentru compararea pneurilor de diferite tipuri sau utilizate în condiții diferite.

Ecuația 7 a fost stabilită mai întâi empiric, pe baza constatărilor experimentale, deci nu ar fi exclus ca aceasta să nu fie valabilă în (foarte puține) cazuri particulare. În plus, deoarece coeficientul de alunecare totală este stabilit pe baza cinematicii jantei și nu a porțiunii de pneu aflate în pata de contact, în regimuri tranzitorii (precum pornirea) ecuația chiar conduce la rezultate ușor diferite față de cele experimentale. Mai mult, în momentul în care vehiculul s-a oprit, fiecare pneu avea o anumită deformație, căreia îi corespunde o valoare a coeficientului de alunecare totală și deci a forței de aderență. Aceasta va rămâne ca valoare inițială pentru momentul repornirii și se va modifica treptat pe durata parcurgerii lungimii de intrare. Un lucru însă este clar: din cauza vitezei Vt mici (care apare la numitorul ecuației 10), forța de aderență va înregistra variații rapide ce vor produce vibrații (mai ales torsionale) ale roților motoare, acestea putând fi observate la pornirea autovehiculelor.

10. Înclinarea laterală a solului are efecte asemănătoare cu modificarea unghiului de cădere, dar nu identice. Într-adevăr, variația înclinării laterale la cele două roți sau o diferență de înălțime a drumului în pata de contact dau efecte aproape similare cu o modificare a unghiului de cădere. O instabilitate destul de accentuată poate apărea la deplasarea pe șlearui (șanțuri longitudinale, ce se pot forma inclusiv pe asfalt), în lungul liniei de tramvai sau peste marcajele rutiere lipite pe asfalt. Să presupunem că marcajul lipit pe drum sau linia de tramvai sunt mai sus decât restul suprafeței asfaltului cu doar 2…3 mm. La urcarea pneului cu partea din exterior pe marcaj sau șină, roata va „trage" toată puntea din față în acea parte. Șoferul, surprins de virarea necomandată, va roti volanul în partea opusă, simultan cu schimbarea direcției în care „trage" acea roată deoarece începuse să coboare de pe ridicătură. Tot în același timp, roata de la puntea din spate va începe să urce, producând și ea o deviație a autovehiculului în aceeași parte. Efectul însumat al celor trei acțiuni (urcarea roții din spate, revenirea roții din față și contravirarea realizată de șofer) reprezintă premiza unei deviații laterale și a unei giratii cu amplitudine mare, care face foarte probabil un accident rutier. La efectul produs de unghiul de cădere aparent se adaugă și cel al unor posibile valori diferite ale coeficientului de aderență în pata de contact (zone de asfalt, respectiv zone de oțel, de plastic sau de vopsea).

11. La pornire, cât este forța de rezistență la rulare? Mi-am pus această întrebare doar când, încercând sa simulez pe calculator pornirea pe drum orizontal, am observat că mai întâi autovehiculul pleca înapoi. Apoi m-am lămurit: pe măsură ce roata începe să se deplaseze, brațul forței normale e (și, în consecință, rezistență la rulare Rr) crește progresiv de la zero până la valoarea nominală. Și mai este un aspect, Rr își schimbă orientarea în funcție de sensul vitezei: de ex. la pornirea în rampă vehiculul poate pleca mai întâi la vale și doar apoi să înceapă să urce, iar în aceste perioade rezistența la rulare va fi orientată diferit.

Pe sol deformabil, histerezisul se mărește atât din cauza plasticității solului (împins și deformat), cât și a frecării dintre flancurile pneului și sol (distanța "e" va fi mai mare). Aceasta înseamnă că rezistența la rulare a pneului este mai mare dacă rulează pe sol moale față de cazul solului tare. Într-adevăr, dacă pe soluri tari ordinul de mărime al coeficientului de rezistență la rulare este f=0,01…0,05, el poate crește cu ușurință la 0,35 pe un sol saturat de apă sau pe nisip uscat și poate ajunge sau chiar depăși valoarea 1 pe teren mlăștinos.

În literatura de specialitate, cel mai adesea se studiază cazul particular al unui regim de mișcare stabilizat al roții (însă greu de obținut în practică), adică se consideră ε_R=0. În aceste condiții, ecuația 14 devine

$$F_R = F_x + F_z f = F_x + R_r \quad (15)$$

Doar în acest caz și considerând în plus că forța de tracțiune este egală cu componenta longitudinală a forței de aderență (F_t=F_x), se ajunge la exprimarea folosită adesea că "forța la roată (forța de tracțiune brută) este egală cu suma forțelor de tracțiune netă și de rezistență la rulare". Deși reprezintă doar un caz particular [19], mai mult teoretic, această ipoteză este folosită adesea pentru studiul performanțelor dinamice ale autovehiculului, ajungându-se la așa numita ecuație generală de mișcare [18],[43],[19].

De fapt, neapărând ca forțe exterioare în modelul roții (a se vedea figurile 8 sau 11), atât forța la roată F_R, cât și forța de rezistență la rulare R_r, sunt forțe fictive, care nu pot fi măsurate direct, ci doar calculate cu ajutorul razei dinamice r_d. De aceea, într-o ecuație de mișcare pot să apară fie F_R și R_r, fie doar F_x, dar niciodată toate trei. Se poate menționa de asemenea că cele trei forțe F_R, R_r și F_x care apar în ecuația 14 trebuie să aibă același suport (dar adesea ele nu sunt reprezentate toate la distanța rd față de axa roții).

În anumite condiții (sol deformabil sau roată înclinată – a se vedea și figurile 11 sau 13), rd nu poate fi cunoscută cu precizie, ci doar estimată, ceea ce face foarte dificilă atât evaluarea corectă a rezistenței la rulare, cât și separarea valorii sale de cea a forței la roată. Practic, în studiile de dinamică a autovehiculelor, forța la roată F_R este utilizată pentru a indica modalitatea de conversie a cuplului de antrenare (sau de frânare) în forță de tracțiune (de frânare) [45], iar rezistența la rulare R_r pentru a considera efectul cuplului care se opune rotirii roții asupra dinamicii autovehiculului.

Puterea consumată pentru învingerea rezistenței la rulare se calculează cu ecuația $P_r = M_R\, \omega_R$. (16)

Aceasta înseamnă că, dacă roata se rotește, se consumă energie pentru învingerea rezistenței la rulare chiar dacă autovehiculul stă pe loc (cazul roților care patinează).

În concordanță cu standardele de testare ISO 18164 și ISO 28580, rezistența la rulare a unui pneu se definește ca "pierderea de energie (sau energia consumată) pe unitate de distanță parcursă" [14],[46] (de fapt, energia raportată la distanță este putere raportată la viteză, adică tot forță).

Prin ce diferă această definiție de valoarea $R_r = F_z\, e/r_d$, găsită în ecuația 14? Răspunsul constă în faptul că forța R_r din ecuația 14 corespunde unei viteze periferice a roții $\omega\, r_d$ care, din cauza unei posibile alunecări, diferă în general de viteza vehiculului V_x, la care se raportează standardele amintite. Aceasta arată că în standarde se indică de fapt în ce mod resimte autovehiculul rezistența la rulare a roții, adică R_r=P_r/V_x=$M_R\, \omega_R/V_x$=M_R/r_e, unde raza de rulare efectivă r_e depinde de alunecare. Prin definiția folosită se surprinde faptul că rezistența la rulare depinde și de alunecarea roții (deoarece distanța parcursă se modifică în funcție de alunecare). De aici rezultă și că rezistența la rulare resimțită de autovehicul va fi mai mare la tracțiune și mai mică la frânare.

Este încă neclar dacă anumite pierderi de energie (precum frecări între pereții laterali ai pneului și sol, în rulmenții roții sau în amortizoarele și bucșele suspensiei) ar trebui considerate la creșterea rezistenței la rulare sau la diminuarea forței la roată. Însă, dacă privim ecuația 15, constatăm că alegerea uneia dintre variante nu este foarte importantă pentru dinamica vehiculului, întrucât forța de tracțiune netă rămâne aceeași.

Rezistența la rulare este foarte mult influențată de tipul solului (material, rugozitate, textură), de umiditatea solului și eventuala existență a unui strat de apă, de viteză, de presiunea de umflare, de încărcarea și tipul pneului, de temperatura cauciucului pneului (care depinde de temperatura solului și a aerului atmosferic și, mai ales, de starea de solicitare a pneului) [10].

Pierderea de energie care se înregistrează la rularea pneului va duce la încălzirea pneului. Creșterea temperaturii acestuia are un efect dublu asupra rezistenței la rulare: mărește histerezisul cauciucului, dar crește și presiunea aerului din interior, care în general are o influență mai mare, conducând la o scădere de ansamblu a rezistenței. Roțile cu diametre mai mari prezintă în general o rezistență la rulare mai mică în comparație cu cele de mici dimensiuni. De asemenea, pe drum de pământ (macadam), această rezistență este de circa 4…5 ori mai mare decât pe drum asfaltat sau betonat de calitate bună. Adesea, când se consideră întregul autovehicul, se includ (în mod fals) drept componente ale rezistenței la rulare și anumite pierderi de putere prin alunecare (laterală sau longitudinală), precum cele produse de unghiul de convergență, de procesul de virare și de regimurile de tracțiune sau de frânare. Întrucât aderența și rezistența la rulare sunt puternic influențate de histerezis, care înseamnă pierdere de energie, ne așteptăm ca o îmbunătățire a aderenței să fie însoțită de o creștere a rezistenței la rulare. Aspectul acesta era bine cunoscut: pentru o aderență mai bună trebuie plătit costul unei rezistențe la rulare mai mari. Totuși, cele două fenomene se produc la frecvențe mult diferite (frecvența la deformarea de indentare, ce contribuie la producerea aderenței, este de circa 100 de ori mai mare decât cea de deformare globală a carcasei, specifică rezistenței la rulare). Imediat ce aceste diferențe au fost înțelese (relativ de curând, e drept), fabricanții au reușit să realizeze anvelope care să asigure concomitent atât aderență foarte bună, cât și rezistență la rulare redusă [6].

O analiză extinsă a fenomenelor legate de rezistența la rulare se găsește și în lucrarea [46].

9. MODELE PENTRU PNEURI

În ceea ce s-a prezentat până acum s-a considerat că roata rulează pe un sol neted și plan. Dar există multe alte tipuri de suprafețe pe care pot să ruleze pneurile: o suprafață netedă dar ondulată (de ex. cilindrică, ca în cazul standurilor cu role, figura 20), un obstacol individual (figura 17), un teren denivelat (tare sau deformabil) sau un drum pietruit (figura 18).

Din cauza acestei diversități de condiții de rulare, efortul depus de cercetători pentru înțelegerea și evaluarea calitativă și cantitativă a interacțiunii dintre roată și sol a fost (și rămâne) uriaș, fiind efectuate multiple studii științifice teoretice și experimentale. În prezent există numeroase tipuri de modele teoretice utilizate în acest scop. Ele sunt necesare pentru descrierea profilului solurilor denivelate, pentru indicarea proprietăților solurilor deformabile și, evident, pentru studierea comportamentului pneului în multitudinea condițiilor de utilizare.

Pentru a răspunde acestei ultime cerințe, foarte multe modele recente consideră o carcasă deformabilă, ale cărei porțiuni sunt prinse (prin numeroase elemente arc-amortizor) între ele, de jantă și de o centură inextensibilă dar flexibilă, de care este atașată o bandă de rulare care se comportă asemănător cu o perie de haine, figura 16.

Aceste noi modele se obțin pe baza unor fundamente teoretice destul de riguroase, motiv pentru care pot descrie cu acuratețe legăturile nelineare dintre forțele generate de pneu și coeficientul de alunecare globală, încărcarea normală și coeficientul de aderență. Unele modele fac posibilă înțelegerea

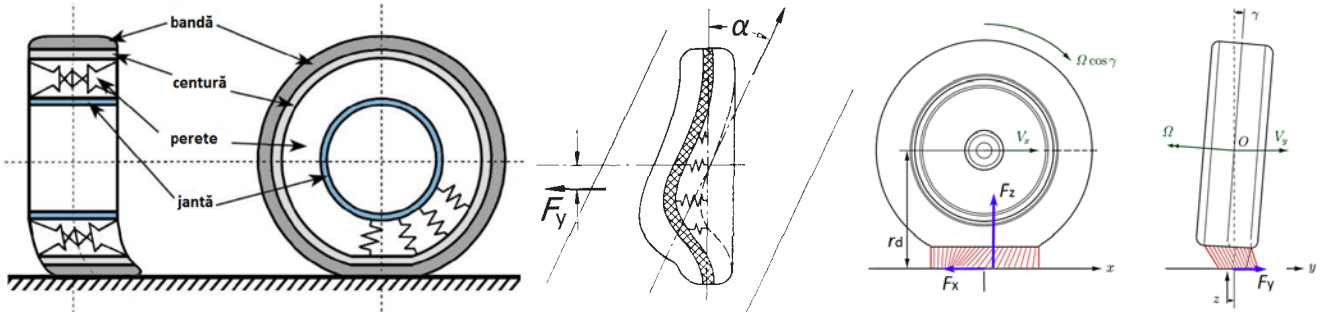

Fig 16. Modele pentru pneuri: bandă inextensibilă dar flexibilă pentru centură (stânga); șnur inextensibil pentru centură (mijloc); perie pentru banda de rulare (dreapta)

contactului pneu-sol tare ([47],[48],[7],[49]), iar altele iau în considerare și comportamentul solului deformabil ([50],[51]). Toate se dovedesc foarte utile, dar complexitatea lor ridicată necesită calculatoare electronice pentru simulare.

10. PROBLEME LA DEFINIREA ADERENȚEI

O atenție ridicată se acordă capacității pneului de a aborda obstacole individuale mici (precum "înglobarea" ridicăturilor și "acoperirea" gropilor) sau de a depăși unele de dimensiuni mai mari (un obstacol de încetinire, o groapă adâncă, o bordură) – câteva exemple pot fi văzute în figura 17.

Pentru viteze foarte mici de abordare a obstacolelor, în mai multe lucrări elaborate la școala prof. Pacejka ([52],[53],[20]) se propun modele semiempirice la care centura și banda de rulare sunt considerate ca un set de inele nedeformabile cu prindere mobilă (prin arcuri și amortizoare) față de jantă, ceea ce permite și considerarea unor obstacole dispuse oblic. Rezultatele simulărilor obținute cu acestea au fost confirmate experimental, inclusiv de alți autori [54],[49]. Aceste modele teoretice, precum și altele [20],[55],[56],[49], propun noțiunea de "suprafață înfășurătoare echivalentă ce corespunde obstacolului singular" și apoi, pe baza acesteia, cea de "plan efectiv al solului", a cărui orientare (înclinare longitudinală și laterală) trebuie modificată permanent în funcție de poziția roții față de obstacol.

Însă, în cazul trecerii rapide peste obstacole individuale (ca cele din figura 17), dar mai ales la deplasarea pe un sol foarte denivelat (ca în figura 18), pata de contact poate fi alcătuită din mai multe zone disjuncte, eventual cu orientări diferite, iar mărimea ariei de contact se modifică foarte rapid.

De asemenea, în anumite cazuri (precum cele prezentate în figura 17), se poate constata că viteza instantanee a roții poate avea o orientare mult diferită față de cea a vitezei vehiculului [54],[57] care nici ea nu rămâne paralelă cu un eventual plan inițial al solului. Din această cauză nu mai este posibilă o definire apriori a unui plan efectiv al solului sau a unui plan al forței de aderență. În consecință, devine extrem de dificilă (dacă nu imposibilă) stabilirea poziției și mărimii nu numai pentru forța de aderență, dar și pentru rezistența la rulare sau forța la roată. La fel de dificilă este și definirea razelor pneului.

Mai multe întrebări încă nu au un răspuns satisfăcător. Ce mărime va avea raza de rulare cinematică, dacă nu se știe direcția x în care e orientată componenta de translație Vx a vitezei roții (cea care apare în relația de definiție re=Vx/ω)? Dar raza dinamică, dacă nu se poate preciza poziția forței de aderență? Cum ținem cont că dacă se modifică mărimea vitezei de trecere peste obstacol a întregului vehicul se schimbă orientările atât pentru această viteză cât și pentru viteza centrului roții? E greu de spus. De aceea, ar fi preferabil să se considere doar forța totală R și momentul total M de contact (de interacțiune dintre roată și sol) [49].

Într-o astfel de abordare (întâlnită și la unele aplicații de calcul comerciale destinate analizei dinamicii sistemelor multicorp ([58], [22]), solul se modelează ca o alăturare de "petece" de suprafață, fie rigide, fie cu proprietăți elastoplastice (ca în figura 18, mijloc și jos). Pentru descrierea solului este nevoie doar ca, într-un sistem de referință cartezian global, cu planul xy poziționat orizontal, să se indice înălțimea z (și opțional coeficientul de aderență μ) ca o funcție de coordonatele x și y. Nu este nevoie să se indice și unghiurile de înclinare ale elementelor de suprafață, acestea fiind calculate prin program. Pentru "petecele" la care se constată că ating solul se obțin forțe de contact elementare. Rezultanta acestora va fi forța totală R, iar prin însumarea efectelor lor față de un anumit punct de interes se obține momentul total M. În final, pe baza forțelor și momentelor totale de la toate roțile se vor obține accelerațiile mișcării spațiale (deci și pe verticală) atât pentru fiecare roată în parte, cât și pentru vehicul în ansamblu (figura 18, sus). Dacă la descrierea

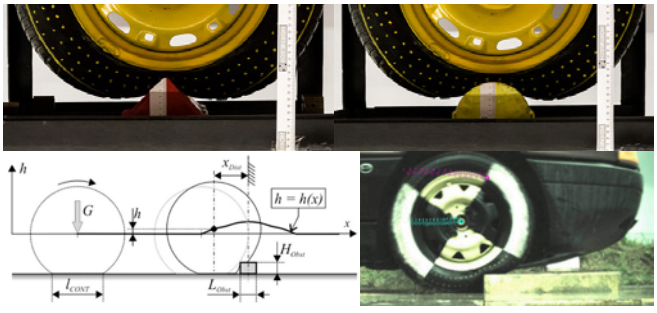

Fig. 17. Exemple de trecere a roții peste obstacole: se poate observa că atât viteza vehiculului, cât mai ales cea a roții, își pot modifica rapid orientarea și mărimea (viteza centrului roții nu mai are direcția x, ci e tangentă la traiectoria h(x)

"petecelor" de suprafață se adaugă și proprietăți elastoplastice, atunci cu astfel de modele pot fi studiate și fenomene foarte complexe ce definesc comportamentul solului deformabil, precum revenirea parțială spre forma inițială, tasarea succesivă ca urmare a trecerilor multiple sau influența urmelor lăsate anterior de trecerea pneului (figura 18, jos).

11. INSTALAȚII ȘI METODE EXPERIMENTALE

Rezultatele teoretice obținute prin modelare și simulare pot fi valoroase doar dacă sunt confirmate de încercări experimentale. Determinarea practică a valorii forței de aderență, a rezistenței la rulare sau a razelor roții se poate face într-o mare diversitate de moduri, fiecare dintre acestea pretându-se pentru anumite experimente și prezentând avantaje și dezavantaje specifice. O primă clasificare ar consta în testări pe traseu sau în laborator, fie pentru un singur pneu, pneurile unei punți sau ale întregului vehicul.

Dacă testele pe traseu pot cuprinde o mare gamă de condiții, cele de laborator pot fi mai ușor de repetat și controlat, pot furniza rezultate mai precise și în

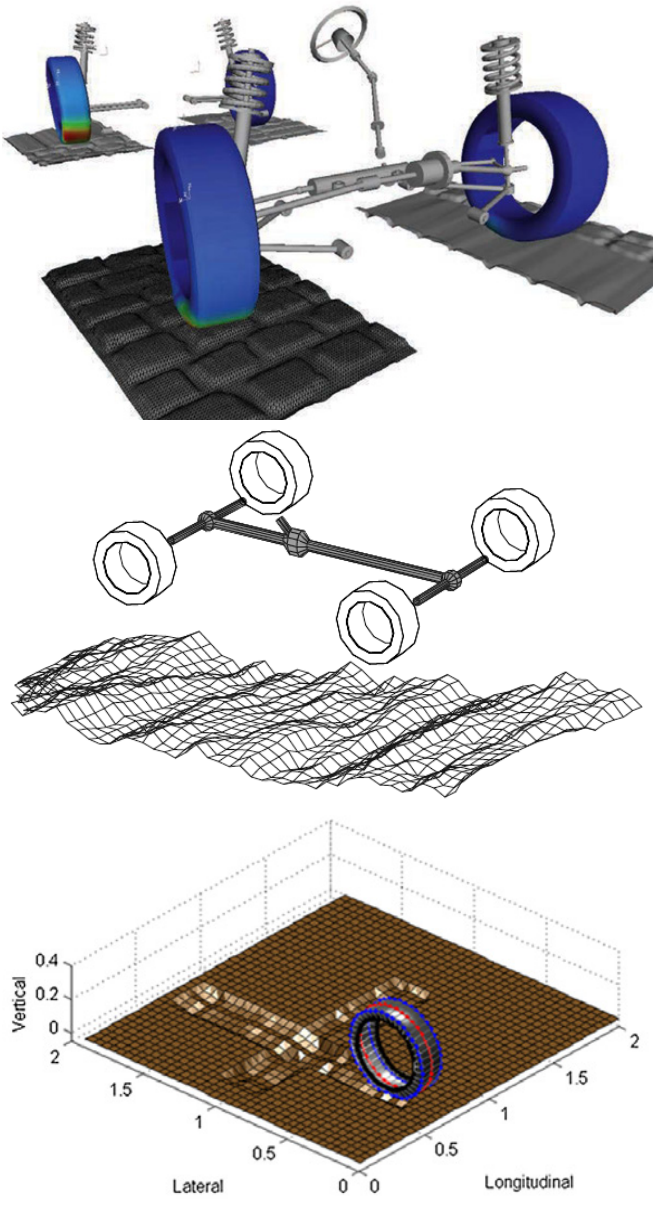

Fig 18. Exemple de modelare și reprezentare a unor soluri denivelate la care este nevoie să se renunțe la noțiunile de plan al solului și plan al forței de aderență

general pot fi realizate cu costuri mai mici. Atât metodele cât și tehnologiile de testare au evoluat foarte mult, iar calculatoarele electronice sunt practic omniprezente pentru controlarea funcționării standului dinamometric și pentru simularea rulării în diferite condiții.

Probele de traseu pot fi utilizate pentru testarea unui singur pneu (atașat la un stand care poate arunca apă și nisip în fața lui și care este plasat pe un vehicul greu, a cărui mișcare poate fi controlată) sau a întregului vehicul (prin metoda tractării sau prin metoda rulării libere).

Însă în prezent și posibilitățile laboratoarelor au devenit impresionante. De exemplu, se pot amenaja în interior porțiuni de sol plat sau denivelat, lungi de zeci de metri, în condiții ambientale dintre cele mai diverse (fiind posibilă rularea pe zăpadă sau gheață, de exemplu). Pentru testarea unei roți se poate controla viteza, cuplul (motor sau de frânare), poziția, coeficientul de alunecare sau forțele normală și de aderență (un exemplu în [59]). Dacă la unele astfel de sisteme de testare se deplasează pneul, la altele (cu bandă plată continuă, cu disc sau cu role) axa roții se poate menține fixă, prin aceasta reducându-se spațiul necesar instalației. Acestea din urmă permit viteze mari de rulare și durate lungi de testare, ceea ce nu este posibil pe standurile cu sol amenajat.

La un cost ridicat, standurile cu bandă flexibilă continuă asigură planeitatea specifică drumului, dar în general pot fi utilizate doar câteva tipuri de suprafețe de rulare: tablă netedă din oțel sau "glaspapir" (suprafață texturată, rugoasă). Pe cele mai întâlnite mașini de testare de acest fel poate rula o singură roată (figura 19, stânga), pe când pe altele pot rula două roți (ale unei punți), iar cele de mari dimensiuni pot asigura o cale de rulare unică pentru toate patru roțile unui autoturism. Probabil că maximul de complexitate se întâlnește la standurile cu patru benzi continue, câte una pentru fiecare roată a unui autoturism, care pot asigura și săltarea rapidă a benzii, permițând nu doar antrenarea, frânarea sau bracarea independentă a fiecărei roți, ci și testarea confortului vehiculului la oscilații verticale.

Standurile cu disc (cu bandă inelară) sunt folosite mai ales pentru testarea motocicletelor (sau a pneurilor pentru acestea) deoarece permit simularea virajului efectuat cu unghi de cădere foarte mare (figura 19, dreapta). Suprafața de rulare, o zonă inelară plană, poate fi realizată din mai multe porțiuni demontabile, prevăzute eventual cu denivelări verticale. În schimb, pe astfel de standuri rularea în linie dreaptă nu poate fi experimentată.

Totuși, dintre probele realizate în laborator, cele mai utilizate (și mai cunoscute) sunt testările pe standuri cu role[12], figura 20. Având aceleași tipuri de suprafețe (tablă netedă sau rugoasă) ca și standurile cu bandă flexibilă, rotoarele acestor standuri pot fi prevăzute și cu obstacole individuale de mici dimensiuni, care pot produce pneului solicitări normale repetate ce pot contribui și la studierea suspensiei (un exemplu în [60]).

Se folosesc trei tipuri de standuri cu role și ele au în general un număr limitat de valori ale diametrelor zonelor de rulare:

- cu tambur și rulare interioară (figura 20, stânga): Φ=3,8 m, Φ=4,5 m;
- cu o rolă și rulare exterioară (figura 20, mijloc): Φ=1,5 m, Φ=1,71 m, Φ=2 m;
- cu două role și rulare exterioară (figura 20, dreapta): Φ=0,318 m (distanța dintre axele rolelor de 0,54 m).

Standurile cu role sunt utilizate frecvent pentru determinarea experimentală a forței de aderență, a rezistenței la rulare și a performanțelor globale ale autovehiculului [61],[62],[63],[64],[65].

Dar, la rularea pe acestea, pneul are o pată de contact curbă, cauzată de forma cilindrică a rotorului, ceea ce, față de deplasarea pe sol neted, modifică distribuția presiunii de contact, precum și mărimea razelor pneului și a forțelor de aderență și de rezistență la rulare. Se constată și că pneurile au o rigiditate

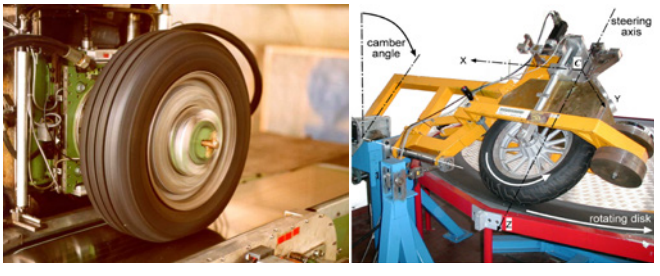

Fig. 19. Exemple de testare a pneului pe standuri cu suprafață de rulare plată

12. Uneori, în locul cuvântului rolă se pot întâlni rulou, tambur sau tobă. Fără ca indicația să fie exclusivă, rolă și rulou se folosesc mai ales atunci când roata se află în exteriorul rotorului standului, iar tambur sau tobă dacă roata este plasată în interior.

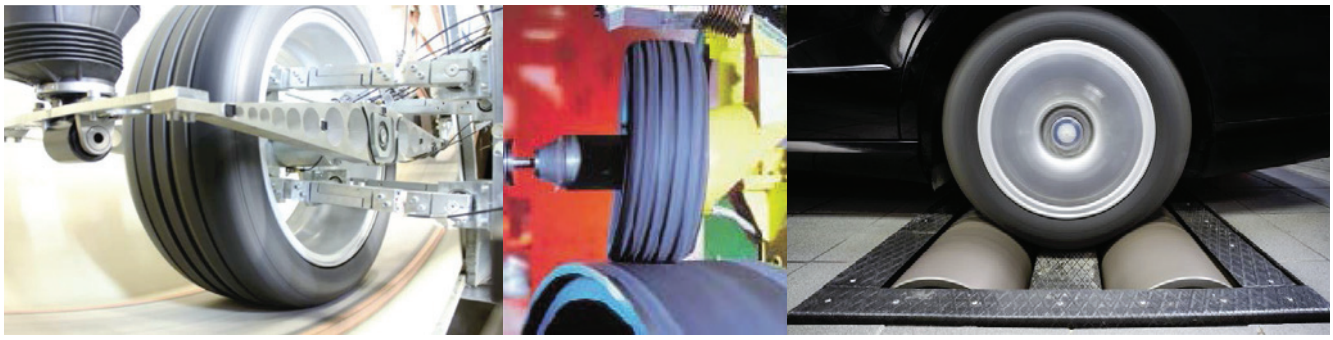

Fig. 20. Exemple de testare a pneului pe standuri cu role: stânga – o rolă interioară (tambur, tobă); mijloc – o rolă exterioară; dreapta – două role exterioare

normală mai redusă la rularea exterioară pe standul cu o rolă, aceasta fiind cu circa 10% mai mică decât rigiditatea determinată la rularea pe suprafață plană [17]. De asemenea, sensibilitatea razei de rulare cinematice rk față de uzura pneului este și mai mică decât la rularea pe suprafață plată: la un pneu de autoturism, o modificare de 1 mm a grosimii benzii de rulare modifică rk cu doar 0,1 mm (rezultat teoretic, [20]) sau 0,07 mm (rezultat experimental, [25]).

Din cauza formei curbe a petei de contact, suportul forțelor de aderență și de rezistență la rulare nu va fi tangent la suprafața cilindrică a rotorului standului (cum se consideră aproape întotdeauna, fără nicio justificare), ci mai aproape de axa de rotație a rotorului.

Condițiile cele mai apropiate de rularea pe sol plat se obțin la testarea pe standurile cu tambur și rulare interioară, unde deformația suplimentară a pneului e mică (≈1 mm la Φ=2 m). Acesta este principalul motiv pentru care standardele de determinare a rezistenței la rulare ([14],[46]) impun ca diametrul rolei unice sau tobei să fie mai mare de 1,7 m.

În prezent, nu există o metodă general acceptată care să permită echivalarea între ele a rezultatelor generate cu diferite mașini de testare cu role și, cu atât mai puțin, între acestea și cele obținute la testarea pe drum. Oricum, rezistența la rulare stabilită pe standuri cu role și rulare exterioară este mai mare decât cea corespunzătoare rulării pe drum, iar această tendință se accentuează dacă raza rolei R=Φ/2 e mai mică.

Orientativ, pot fi utilizate două formule pentru echivalare. Prima, denumită formula lui S. K. Clark, a fost stabilită în 1979 și este încă utilizată în standardele ISO și SAE. Aceasta arată că rezistența la rulare pe standul cu o rolă (exterioară) este de $\sqrt{1+\frac{r}{R}}$ ori mai mare decât pe drum. În [61],[43],[14] se indică r ca fiind distanța de la axa de rotație la punctul de pe pneu cu cea mai mare deformație (raza pneului încărcat rl), iar în [46] ca fiind raza liberă nominală r0 a pneului (însă aceste diferențe au o influență redusă asupra rezultatelor). Ca exemplu, pentru o roată cu raza de 0,3 m testată pe un stand cu o rolă cu diametrul de 2 m, rezistența la rulare este cu circa 14% mai mare decât pe drum și ar trebui corectată cu un factor egal cu 0,877.

Cea de a doua formulă de echivalare este utilizabilă pentru standul cu două role: $\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{1+\frac{r}{R}}$ (unde $\sin\alpha=\frac{a}{r+R}$ și 2a – distanța dintre axele rolelor) [61]. Tot ca exemplu, pentru aceeași roată cu raza r=0,3 m testată pe un stand cu două role cu raza R=0,159 m și distanța dintre axe 2a=0,54 m, rezistența la rulare este de 1,699/0,809=2,1 ori mai mare decât pe drum și ar trebui corectată cu un factor egal cu 0,476. În cazul rulării pe standul cu două role, forța de rezistență la rulare este mai mare decât cea măsurată pe standul cu o rolă nu numai din cauza dimensiunii reduse a rolelor, ci și pentru că forța de apăsare (forța normală) însumată de la cele două role e mai mare. Pentru că introduc rezistențe la rulare prea mari, standurile cu două role care permit doar frânarea sau rotirea liberă a rolelor nu pot simula deplasarea pe teren tare [61]. Cu toate acestea, întrucât sunt cele mai ieftine și astfel mai accesibile, se încearcă frecvent ([61],[62],[63],[64],[65]) utilizarea lor (eventual prin unele adaptări) pentru înlocuirea testărilor pe traseu, atât pentru studiul pneurilor, cât și pentru estimarea performanțelor autovehiculului în ansamblu (performanțe dinamice, de consum, de poluare).

În general, standurile cu două role permit testarea simultană a roților aceleiași punți și au rolele de pe stânga și dreapta vehiculului conectate între ele (au aceeași viteză unghiulară). Din această cauză, pot apărea alunecări suplimentare între roți și role sau în diferențialul punții, ceea ce va afecta suplimentar mărimea rezistenței la rulare ce va fi înregistrată. De asemenea, modul de ancorare a vehiculului poate influența semnificativ precizia măsurătorilor, prin eventuala modificare a forțelor normale.

În acest moment al prezentării pot fi menționate și alte câteva studii cu experimentări reprezentative realizate de cercetători români: determinări ale rezistenței la rulare pe stand cu două role [66],[67]; evaluarea rezistenței la rulare (și a celei aerodinamice) pe baza probei de rulare liberă pe traseu (coast-down test) prin măsurarea spațiului total de rulare [68] sau prin măsurarea decelerației [69]; determinarea pe stand cu o rolă a razei de rulare și indicarea principalilor parametri care o influențează [34]; măsurarea deformației normale la trecerea pneului peste obstacole de mari dimensiuni [70].

12. CONCLUZII

În aparență o simplă componentă a autovehiculului, pneul se dovedește a fi un element de mare complexitate, care a necesitat și căruia i se dedică în continuare numeroase studii teoretice și experimentale menite să contribuie la înțelegerea modului în care acesta se comportă în procesul rulării.

Aderența pneu-sol este fenomenul fizic care se opune mișcării relative a roții față de sol și stabilește abilitatea roții de a genera forțe necesare deplasării. Într-o exprimare mai plastică, cu ajutorul aderenței autovehiculul reușește, prin intermediul roților sau șenilelor, să "convingă" solul să-l ducă acolo unde dorește conducătorul. Influențând major abilitățile de demarare, frânare și virare, aderența are o importanță esențială pentru performanțele dinamice și siguranța deplasării vehiculelor terestre.

În prezenta lucrare s-a încercat identificarea fenomenelor care stau la baza acestui proces, a mărimilor care îl influențează, a felului în care forța de aderență este corelată cu forțele la roată și cea de rezistență la rulare. De asemenea, s-a dorit să se arate că în anumite condiții însăși definirea forței de aderență este foarte dificilă, ca și separarea acestei forțe de cea de reacțiune normală.

MULȚUMIRI

La finalul acestui text, aș vrea să aduc un cuvânt de apreciere pentru toți profesorii sau cercetătorii români care au avut sau au contribuții importante

la cercetarea interacțiunii roții cu solul și pe care am avut onoarea și bucuria să îi cunosc personal sau chiar să colaborez: Marin Untaru, Eugen Negruș, Vasile Hara, Gheorghe Poțincu, Aurel Stoicescu, Nicolae Seitz, Gheorghe Pereș, Ioan Filip (dispăruți dintre noi), Corina Sandu, Ticușor Ciobotaru, Gabriel Anghelache, Radu Roșca, Liviu Mihon (colegi de generație), Adrian Șoica, Alexandra-Raluca Moisescu, Petru Roșca, Daniel Trușcă (tineri harnici și talentați).

BIBLIOGRAFIE:

[1] SAE J670e, Vehicle Dynamics Terminology (revised 2008-01-24), -SAE-, 1976.
[2] R. He et al., „Updated Standards of the International Society for Terrain-Vehicle Systems," Journal of Terramechanics, vol. 91, pp. 185-231, 2020/10/01/ 2020.
[3] I. Preda and C. Sandu, „Clarificari si echivalente: razele rotilor / Clarifications and equivalences: wheel radii," Ingineria Automobilului, vol. sep.2022, no. 64, pp. 7-11, 2022.
[4] P. Roșca, M.-I. Mărmureanu, T.-V. Țigănescu, C.-M. Pîrvulescu, I.-M. Bîndac, and C. Doru, „Determination of tyre-ground interaction parameters through image processing in Matlab," International Journal of Heavy Vehicle Systems, vol. 28, no. 5, 2022.
[5] T. Botha, D. Johnson, S. Els, and S. Shoop, „Real time rut profile measurement in varying terrain types using digital image correlation," Journal of Terramechanics, vol. 82, pp. 53-61, 2019/04/01/ 2019.
[6] -Michelin-, The tyre grip: Société de Technologie Michelin, 2001.
[7] M. Zhang, H.-J. Unrau, M. Gießler, and F. Gauterin, „A detailed tire tread friction model considering dynamic friction states," Tribology International, vol. 193, 2024.
[8] E. Negruș, I. Soare, F. Tănase, and N. Bejan, Încercarea automobilelor. București: Editura Didactică și Pedagogică, 1983.
[9] G. Anghelache, A. R. Moisescu, and D. L. Burețea, „Assessment on the methods of measuring the tyre-road contact patch stresses," IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 227, 2017.
[10] A. Genovese and F. Timpone, „Tyre Mechanics and Thermal Effects on Tyre Behaviour," in Vehicle Dynamics: Fundamentals and Ultimate Trends, B. Lenzo Ed. Cham: Springer International Publishing, 2022, pp. 139-192.
[11] B. Jacobson, Vehicle Dynamics. Compendium. Chalmers, Sweden: Chalmers University of Technology, 2017.
[12] R. Roșca, E. Rakosi, and G. Manolache, „Wheel Traction Prediction - A Comparison Between Models and Experimental Data," 2004-10-26, 2004.
[13] I. Preda, „Theoretical estimation of the drawbar pull for two-axle automotive vehicles," IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 1220, no. 012013, 2022.
[14] ISO 18164 International Standard - Passenger car, truck, bus and motorcycle tyres - Methods of measuring rolling resistance, ISO, 2005 (reviewed and confirmed in 2018).
[15] J. Holtschulze et al., „A tyre sensor system with electronics for data transmission and power supply," AutoTechnology, vol. 5, no. 3, pp. 44-47, 2005/05/01 2005.
[16] T. Ciobotaru, V. Vinturis, and V. Ionascu, „Method for measuring tire deflection," presented at the SMAT 2008, Second International Congress Automotive, Safety and Environment, Craiova, Romania, 2008.
[17] R. G. Longoria, R. Brushaber, and A. Simms, „An in-wheel sensor for monitoring tire-terrain interaction: Development and laboratory testing," Journal of Terramechanics, vol. 82, pp. 43-52, 2019/04/01/ 2019.
[18] M. Untaru, G. Poțincu, A. Stoicescu, G. Pereș, and I. Tabacu, Dinamica autovehiculelor pe roți. Bucharest: Editura Didactică și Pedagogică, 1981.
[19] I. Preda, „Ecuatia generala de miscare – nimic mai simplu!? (The general equation of motion - nothing simpler!?)," Ingineria Automobilului, vol. dec.2020, no. 57, pp. 9-15, Dec 2020.
[20] H. B. Pacejka, Tyre and Vehicle Dynamics, Third ed. Elsevier, 2012.
[21] R. N. Jazar, Vehicle Dynamics: Theory and Application. Springer, 2008.
[22] G. Rill, Road Vehicle Dynamics - Fundamentals and Modeling. Boca Raton, FL: CRC Press, 2012.
[23] G. Genta and L. Morello, The Automotive Chassis. Vol. 1 - Components Design. Springer, 2009.
[24] G. Anghelache and T. Ciobotaru, „Tyre and rim dimensions through statistical estimation," presented at the ESFA 2023, Bucuresti, 2023.
[25] Y. Kan, S. Hoffman, and T. Carter, „Tire Rolling Radius Evolution with Tread Depth and the Implications for Tire Replacement on All-Wheel Drive Vehicles," SAE Technical Paper, no. 2020-01-5070, 2020.
[26] A. Soica, O. V. Câmpian, G. Ciolan, I. Preda, and D. Trusca, Elemente de dinamica autovehiculelor. Brasov: Ed. Univ. Transilvania din Brasov (in Română), 2014.
[27] F. Calabrese, F. Farroni, and F. Timpone, „A Flexible Ring Tyre Model for Normal Interaction," International Review on Modelling and Simulations (IREMOS), vol. 6, 08/01 2013.
[28] H.-J. Unrau, „Testing Facilities Institute of Vehicle System Technology - FAST, Karlsruhe," Karlsruhe, 2018 September 2018.
[29] M. Domenighini, L. Bartali, E. Grabovic, and M. Gabiccini, „Minimum-Lap-Time Planning of Multibody Vehicle Models via the Articulated-Body Algorithm," Designs, vol. 7, no. 3, 2023, doi: 10.3390/designs7030065.
[30] M. Guiggiani, The Science of Vehicle Dynamics – Handling, Braking, and Ride of Road and Race Cars. London: Springer, 2014.
[31] V. Vantsevich, D. Barz, J. Kubler, and A. Schumacher, „Tire Longitudinal Elasticity and Effective Rolling Radii: Experimental Method and Data," SAE Technical Papers, vol. Kistler, no. 2005-01-1823, 04/11 2005.
[32] A. J. Tuononen, „Laser triangulation to measure the carcass deflections of a rolling tire," Measurement Science and Technology, vol. 22, no. 12, p. 125304, 2011/11/15 2011, doi: 10.1088/0957-0233/22/12/125304.
[33] J. Pauwelussen, Essentials of Vehicle Dynamics. Elsevier, 2015.
[34] G. Anghelache and R. Moisescu, „The measurement of dynamic radii for passenger car tyre," IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, vol. 252, p. 012014, 2017/10 2017.
[35] R. N. Jazar, Advanced Vehicle Dynamics. Springer, 2019.
[36] W. F. Milliken and D. L. Milliken, Race car vehicle dynamics. SAE, 1997.
[37] C. Oertel, „75 Years of Tyre Modelling for Vehicle System Dynamics Analysis: Review and Future Challenges," in Proceedings of the 4th International Tyre Colloquium, 2015: IAVSD.
[38] T. D. Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics. Warrendale, USA: SAE, 1992.
[39] G. Anghelache, R. Moisescu, O. Ciubotaru, and C. Dragomir, „Investigation of Automotive Tire Contact Stress Under Real Rolling Conditions," no. SAE 2005-01-1822, 2005-04-11 2005.
[40] I. Preda and G. Ciolan, „Vehicle mathematical model for the study of cornering," Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering, vol. XI (XXI), no. 2/1, pp. 22-32, 2012.
[41] I. Besselink, A. Schmeitz, and H. B. Pacejka, „An improved Magic Formula/Swift tyre model that can handle inflation pressure changes," Vehicle System Dynamics, vol. 48, no. sup1, pp. 337-352, 2010/12/01 2010.
[42] I. Preda and G. Ciolan, „Modelarea interactiunii dintre roata si sol," presented at the CAR1997, Pitesti, 1997.
[43] M. Mitschke and H. Wallentowitz, Dynamik der Kraftfahrzeuge, 5. Auflage ed. Berlin: Springer, 2014.
[44] J. Y. Wong, Theory of Ground Vehicles, Third ed. Ottawa, Canada: Wiley, 2001.
[45] H. D. Kutzbach, A. Bürger, and S. Böttinger, „Rolling radii and moment arm of the wheel load for pneumatic tyres," Journal of Terramechanics, vol. 82, pp. 13-21, 2019.
[46] L. Ydrefors, M. Hjort, S. Kharrazi, J. Jerrelind, and A. Stensson Trigell, „Rolling resistance and its relation to operating conditions: A literature review," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, vol. 235, no. 12, pp. 2931-2948, 2021/10/01 2021.
[47] R. Dessort, C. Chucholowski, and G. Rill, „Parametrical approach for modeling of tire forces and torques in TMeasy 5," in 16. Internationales Stuttgarter Symposium, Wiesbaden, M. Bargende, H.-C. Reuss, and J. Wiedemann, Eds., 2016: Springer Fachmedien Wiesbaden, pp. 435-449.
[48] A. O'Neill, J. Prins, J. F. Watts, and P. Gruber, „Enhancing brush tyre model accuracy through friction measurements," Vehicle System Dynamics, vol. 60, no. 6, pp. 2075-2097, 2022/06/03 2022.
[49] Y. Pang and G. Prokop, „Modeling of Tire-Obstacle Contact with Focus on Calculation Accuracy and Efficiency," 2021-04-06, 2021.
[50] C. Sandu, S. Taheri, S. Taheri, and D. Gorsich, „Hybrid Soft Soil Tire Model (HSSTM). Part II: Tire-terrain interaction," Journal of Terramechanics, vol. 86, pp. 15-29, 2019/12/01/ 2019.
[51] V. S. Swamy et al., „Review of modeling and validation techniques for tire-deformable soil interactions," Journal of Terramechanics, vol. 109, pp. 73-92, 2023/10/01/ 2023.
[52] P. W. A. Zegelaar, „The dynamic response of tyres to brake torque variations and road unevenesses," Ph.D. Thesis, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Delft, 1998.
[53] A. Schmeitz, „A Semi-Empirical Three-Dimensional Model of the Pneumatic Tyre Rolling over Arbitrarily Uneven Road Surfaces," Ph.D., Technical University of Delft, 2004.
[54] B. Stojić, N. Poznanović, and A. Poznić, „Research and modeling of the tractor tire enveloping behavior," Journal of Vibration and Control, vol. 23, no. 2, pp. 290-304, 2017/02/01 2015.
[55] F. Farroni and F. Timpone, „A test rig for tyre envelope model characterization," Engineering Letters, vol. 24, pp. 284-289, 01/01 2016.
[56] K. Parczewski and H. Wnęk, „The deformation of the car tire on potholes road," presented at the Transport Means - Proceedings of the International Conference, Juodkrante; Lithuania, 2016.
[57] P. M. Vrabie, C. Nedelescu, I. A. Radu, and D. D. Trusca, „Study on the consequences of the impact of the wheel of the vehicle with a fixed obstacle," Ingineria automobilului nr.61, dec. 2021, no. 61, pp. 22-24.
[58] M. Gipser, „FTire, a New Fast Tire Model for Ride Comfort Simulations," 2004.
[59] R. He, C. Sandu, M. N. Shenvi, H. Mousavi, J. Carrillo, and J. E. Osorio, „Laboratory experimental study of tire tractive performance on soft soil: Towing mode, traction mode, and multi-pass effect," Journal of Terramechanics, vol. 95, pp. 33-58, 2021-06-01 2021.
[60] M. Minakawa, J. Nakahara, J. Ninomiya, and Y. Orimoto, „Method for measuring force transmitted from road surface to tires and its applications," JSAE review, vol. 20, no. 4, pp. 479-485, 1999.
[61] K. Schneider, „Studiul dinamicii longitudinale a automobilului prin simulare in conditii de laborator," Ph.D. Thesis, Univ. Transilvania din Brasov, Brasov, 1997.
[62] C. Engström, P. Öberg, G. Fontaras, and B. Giechaskiel, „Considerations for Achieving Equivalence between Hub-and Roller-Type Dynamometers for Vehicle Exhaust Emissions," Energies, vol. 15, p. 7541, 10/13 2022.
[63] J. J. Eckert et al., „Experimental Evaluation of Rotational Inertia and Tire Rolling Resistance for a Twin Roller Chassis Dynamometer," SAE 2017-36-0212.
[64] M. A. d. M. Lourenço, J. J. Eckert, F. L. Silva, F. M. Santiciolli, and L. C. A. Silva, „Vehicle and twin-roller chassis dynamometer model considering slip tire interactions," Mechanics Based Design of Structures and Machines, vol. 51, no. 11, pp. 6166-6183, 2022.
[65] E. Muthoriq, Z. Abidin, A. Hariyanto, and M. Bur, „Enhancement of a roller brake tester for modelling the tire," Journal of Mechanical Science and Technology, vol. 37, no. 7, pp. 3379-3391, 2023/07/01 2023.
[66] A. Irimescu, L. Mihon, and G. Pădure, „Automotive transmission efficiency measurement using a chassis dynamometer," International Journal of Automotive Technology, vol. 12, no. 4, pp. 555-559, 2011/08/01 2011.
[67] A. Soica, A. Budala, V. Monescu, S. Sommer, and W. Owczarzak, „Method of estimating the rolling resistance coefficient of vehicle tyre using the roller dynamometer," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, vol. 234, no. 13, pp. 3194-3204, 2020/11/01 2020.
[68] I. Preda, M. Untaru, G. Peres, and G. Ciolan, „Algorithm for computing space in free running," Revista Inginerilor de Automobile, no. 2/1990, pp. 11-13.
[69] I. Preda, D. Covaciu, and G. Ciolan, „Coast Down Test–Theoretical And Experimental Approach," in The Automobile and the Environment. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publ., 2011, ch. Chapter Nineteen, pp. 277-288.
[70] P. M. Vrabie, I. C. Rosca, D. D. Trusca, I. Preda, and C. Nedelescu, „Vehicle tire static deformation," Ingineria Automobilului nr.64, vol. sep.2022, no. 64, pp. 21-24, 2022.